

Exerciții aferente cursurilor 3 și 4

octombrie 2020

Deadline: max. 2 săptămâni de la primirea temei.

Curs 3: Principiul porumbelului. Principiul incluziunii și excluziunii

1. Câte șiruri de 7 biți încep cu 00 sau se termină cu 000?
2. Câte numere întregi cuprinse între 50 și 1500 inclusiv
 - (a) se divid cu 3?
 - (b) se divid cu 7?
 - (c) se divid cu 7 dar nu se divid cu 3?
 - (d) se divid cu 3 sau cu 7?
 - (e) nu se divid nici cu 3 și nici cu 7?
3. Câte numere întregi de la 1 la 999 inclusiv
 - (a) se divid cu 7?
 - (b) se divid cu 7 și nu se divid cu 11?
 - (c) se divid cu 7 și 11?
 - (d) se divid cu 7 sau 11?
 - (e) se divid cu doar unul din numerele 7, 11?
 - (f) au cifre distincte?
 - (g) sunt pare și au cifre distincte?
4. Câte numere prime sunt mai mici sau egale ca 101?
5. Într-o clasă sunt 14 fete și 16 băieți. Știm că 22 persoane din clasa respectivă sunt blonde. Care este numărul minim de fete blonde din clasa respectivă?

6. Se consideră mulțimea celor 50 de steaguri ale SUA. Știm că

- 30 steaguri au fundal albastru,
- 12 steaguri au dungi,
- pe 26 steaguri apare o plantă sau un animal,
- 9 steaguri au fundal albastru și dungi,
- 23 steaguri au fundal albastru și o plantă sau animal,
- 3 steaguri au dungi și o plantă sau animal,
- un singur steag (California) are dungi și o plantă sau animal, dar nu are fundal albastru.

Câte state din SUA au steaguri fără fundal albastru, fără dungi, și fără plantă sau animal?

SUGESTIE: Luați în considerare următoarele 3 proprietăți posibile ale steagurilor:

- P_1 : are fundal albastru
- P_2 : are dungi
- P_3 : are o plantă sau animal

Vi se cere să calculați $N(P'_1 P'_2 P'_3)$ (vezi explicațiile de la paginile 43-44 din materialul extins de curs).

7. Câte submulțimi ale mulțimii $\{a, b, c, d, e, 1, 2, 3, 4\}$ conțin cel puțin o literă și cel puțin o cifră?

SUGESTIE: O astfel de submulțime trebuie să fie de forma $A \cup B$ unde

- A este o submulțime nevidă a lui $\{a, b, c, d, e\}$
- B este o submulțime nevidă a lui $\{1, 2, 3, 4\}$.

Aplicați regula produsului.

Curs 4: Tehnici avansate de numărare

1. Determinați o relație de recurență pentru calculul numărului de posibilități de a plăti n lei cu bancnote ipotetice de 1, 3, 5, 10, 25 și 50 lei. Ce valoare are acest număr pentru suma de 100 lei?

SUGESTIE: Scrieți un program care calculează acest număr, folosind relațiile de recurență pe care le-ați determinat.

2. Un mesaj este o secvență finită de semnale de trei feluri care urmează imediat unul după altul: semnalul A durează 1 microsecundă, iar semnalele B și C durează 2 microsecunde. Fie a_n numărul de mesaje diferite care durează n microsecunde.
 - (a) Să se găsească o relație de recurență cu condiții inițiale pentru calculul lui a_n .
 - (b) Câte semnale diferite durează 25 microsecunde?
3. Rezolvați următoarele relații de recurență împreună cu condițiile lor inițiale:
 - (a) $a_0 = 1, a_1 = 0, a_n = 5 a_{n-1} - 6 a_{n-2}$ dacă $n > 1$.
 - (b) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_n = 4 a_{n-1} - 4 a_{n-2}$ dacă $n > 1$.
4. Rezolvați relația de recurență $a_n = 5 a_{n-1} - 6 a_{n-2} + 7^n$.
- 5*. Secvența $\{f_n\}_{n \geq 0}$ a numerelor Fibonacci este definită de relația de recurență cu condițiile inițiale

$$f_0 = 0, f_1 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ dacă } n > 1.$$

- (a) Rezolvați această relație de recurență.
- (b) Demonstrați că f_n este întregul cel mai apropiat de numărul

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$