2.1 Vocabularul teoriei grafurilor

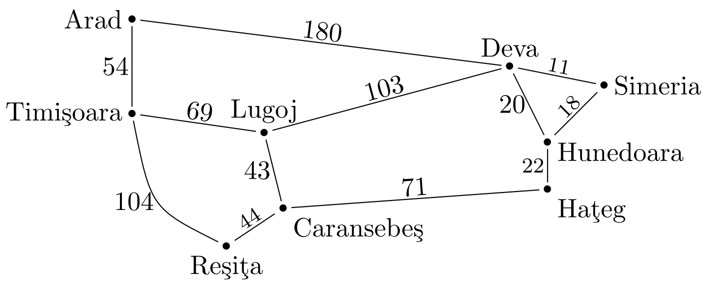
Un **graf** este o pereche (V, E) formată din o mulţime de **noduri** V şi o listă de **muchii** E. Muchiile reprezintă conexiuni dintre noduri. Fiecare muchie $e \in E$ are două capete $x, y \in V$, numite nodurile **adiacente** la e, şi spunem că e este **incidentă** la nodurile x şi y. Muchiile pot fi orientate sau nu. Un **graf orientat** are toate muchiile orientate, iar un graf neorientat are toate muchiile neorientate. Muchiile orientate, numite şi *arce*, au o direcţie de la un capăt numit *sursă* la celălalt capăt, numit *destinaţie*. Folosim notaţiile $x{\rightarrow}y$ pentru un arc de la x la y, c si $x{-}y$ pentru o muchie neorientată incidentă la x şi y. În general, dacă $x \neq y$ atunci $x{\rightarrow}y \neq y{\rightarrow}x$ dar $x{-}y = y{-}x$. Din acest motiv, identificăm $x{\rightarrow}y$ cu perechea ordonată $\langle x, y\rangle \in V \times V$, şi $x{-}y$ cu mulţimea $\{x, y\}$. Grafurile orientate se numesc şi **digrafuri**,

O **buclă** este o muchie incidentă la un singur nod. În general, fiecare muchie $e \in E$ are o **multiplicitate** $m(e) \in \mathbb{N} - \{0\}$ care indică de câte ori apare e în E.

Tipuri de grafuri

Un graf $G = (V, E)$ este **simplu** dacă nu conţine bucle şi $m(e) = 1$ pentru toate muchiile $e \in E$. G este **pseudograf** dacă nu conţine bucle şi există $e \in E$ cu $m(e) > 1$. G este **multigraf** dacă conţine bucle şi există $e \in E$ cu $m(e) > 1$. **Graful suport** al unui graf $G = (V, E)$ este graful simplu $G' = (V, E')$ a cărui mulţime de muchii se obţine eliminând din E buclele şi presupunând că toate celelalte muchii au multiplicitatea 1.

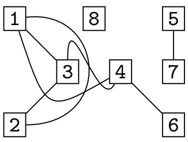
Un **graf ponderat** este o pereche (G, w) formată din un graf $G = (V, E)$ şi o funcţie $w : E \to \mathbb{R}$ care atribuie fiecărei muchii e o **pondere** sau **greutate** $w(e)$. Reprezentarea vizuală a unui graf ponderat include şi valoarea ponderii de-a lungul fiecărei muchii. Figura de mai jos ilustrează un graf ponderat cu distanţele drumurilor dintre câteva oraşe din România:



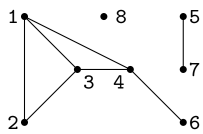
Reprezentări vizuale

Grafurile sunt reprezentate vizual ca figuri constând din puncte (forme geometrice mici: puncte, cercuri, pătrate, etc.) care reprezintă nodurile grafului, şi curbe care conectează capetele muchiilor din graf. Pentru fiecare muchie e desenăm $m(e)$ curbe între capetele ei, iar dacă e este orientată, îi indicăm direcţia cu o săgeată. Putem adăuga etichete (numere, nume, etc.) nodurilor şi muchiilor pentru a obţine reprezentări vizuale mai bune.

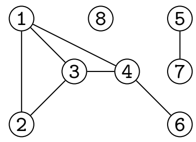
Trei reprezentări în plan ale grafului simplu $G = (\{1,2,3,4,5,6,7,8\}, \{1{-}2, 1{-}3, 1{-}4, 2{-}3, 3{-}4, 4{-}6, 5{-}7\})$ sunt:



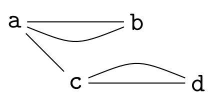
sau



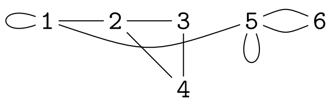
sau



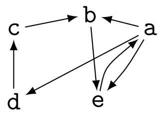
iar pseudograful $G_1 = (\{a,b,c,d\}, \{a{-}b, a{-}b, a{-}c, c{-}d, c{-}d\})$, multigraful $G_2 = (\{1,2,3,4,5,6\}, \{1{-}1, 5{-}5, 1{-}2, 2{-}3, 3{-}4, 2{-}4, 1{-}5, 5{-}6, 5{-}6\})$ şi digraful $G_3 = (\{a,b,c,d,e\}, \{a{\to}b, a{\to}e, a{\to}d, b{\to}e, c{\to}b, d{\to}c, e{\to}a\}$ au reprezentările în plan



G_1



G_2



G_3

2.1.1 Noţiuni fundamentale

În cele ce urmează vom presupune implicit că G este un graf. Vom folosi notaţia $V(G)$ pentru mulţimea de noduri a lui G, şi $E(G)$ pentru colecţia (mulţime sau multiset) de muchii a lui G. **Ordinul** lui G este numărul de noduri din $V(G)$, iar **mărimea** lui G este numărul de muchii din $E(G)$.

Vecinătatea a unui nod x este mulţimea

$$V(x) = \begin{cases} \{y \mid x{-}y \in E(G)\} & \text{dacă } G \text{ este neorientat,} \\ \{y \mid x{\to}y \in E(G)\} & \text{dacă } G \text{ este orientat} \end{cases}$$

iar **vecinătatea închisă** a lui x este $V[x] = V(x) \cup \{x\}$. Dacă S este o mulţime de noduri, atunci vecinătatea lui S este $V(S) = \bigcup_{x \in S} V(x)$ iar vecinătatea închisă a lui S este $V[S] = V(S) \cup S$.

Pentru grafuri orientate definim **gradul interior** şi **gradul exterior** al unui nod x

$$\deg^-(x) = \sum_{y \to x \in E(G)} 1, \qquad \deg^+(x) = \sum_{x \to y \in E(G)} 1.$$

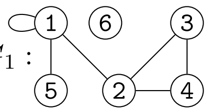
Gradul unui nod x este numărul de muchii la care x este adiacent:

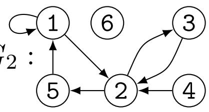
$$\deg(x) = \begin{cases} \sum\limits_{x - x \in E(G)} 2 + \sum\limits_{\substack{x - y \in E(G) \\ x \neq y}} 1 & \text{dacă } G \text{ este neorientat,} \\ \deg^-(x) + \deg^+(x) & \text{dacă } G \text{ este digraf.} \end{cases}$$

Observaţi că buclele se numără de două ori!

Secvenţa de grade a lui G este lista cu gradele nodurilor lui G în ordine descrescătoare.

Exemplul 1. Fie grafurile

G_1 : 

G_2 : 

G_1 este un multigraf neorientat cu $V(G_1) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $|E(G_1)| = 6$ şi caracteristicile următoare ale nodurilor:

v	$V(v)$	$V[v]$	$\deg(v)$
1	$\{1, 2, 5\}$	$\{1, 2, 5\}$	4
2	$\{1, 3, 4\}$	$\{1, 2, 3, 4\}$	3
3	$\{2, 4\}$	$\{2, 3, 4\}$	2
4	$\{2, 3\}$	$\{2, 3, 4\}$	2
5	$\{1\}$	$\{1, 5\}$	1
6	$\emptyset$	$\{6\}$	0

Secvenţa de grade a lui G_1 este lista $[4, 3, 2, 2, 1, 0]$.

G_2 este un digraf cu $V(G_2) = \{a, b, c, d, x, y\}$, $|E(G_2)| = 7$ şi caracteristicile următoare ale nodurilor:

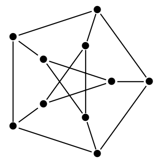
v	$V(v)$	$V[v]$	$\deg^-(v)$	$\deg^+(v)$	$\deg(v)$
1	$\{1, 2, 5\}$	$\{1, 2, 5\}$	2	2	4
2	$\{1, 3, 4, 5\}$	$\{1, 2, 3, 4, 5\}$	3	2	5
3	$\{2, 4\}$	$\{2, 3, 4\}$	1	1	2
4	$\{2, 3\}$	$\{2, 3, 4\}$	0	1	1
5	$\{1, 3\}$	$\{1, 3, 5\}$	1	1	2
6	$\emptyset$	$\{6\}$	0	0	0

Secvenţa de grade a lui G_2 este lista $[5, 4, 2, 2, 1, 0]$.

Se observă că în ambele cazuri avem $\sum_{x \in V(G_i)} \deg(x) = 2 \cdot |E(G_i)|$ $\square$

Gradul minim al lui G este $\delta(G) = \min\{\deg(x) \mid x \in V(G)\}$ iar **gradul**

maxim al lui G este $\Delta(G) = \max\{\deg(x) \mid x \in V(G)\}$. G este **regulat** dacă toate nodurile au acelaşi grad şi k**-regulat** dacă toate nodurile au gradul k. Un exemplu de graf 3-regulat este graful lui Petersen



Un nod $x \in V(G)$ este **izolat** dacă $\deg(x) = 0$, şi **terminal** dacă $\deg(x) = 1$.

2.1.2 Proprietăţi fundamentale

Prima Teoremă a Teoriei Grafurilor. Într-un graf, suma gradelor nodurilor este egală cu dublul numărului de muchii.

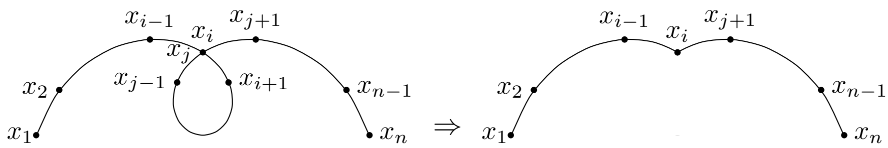
$$\sum_{x \in V(G)} \deg(x) = 2 \cdot |E(G)|.$$

Prin urmare, numărul de noduri cu grad impar este par.

DEMONSTRAŢIE: Fie $N = \sum_{x \in V(G)} \deg(x)$. Se observă că, atunci când calculăm N, numărăm fiecare muchie e de exact 2 ori fiindcă contribuie cu 1 la gradele ambelor noduri adiacente la e. Deci $N = 2 \cdot |E(G)|$. Întrucât $N = \sum_{x \in V(G)} \deg(x)$ este par, este necesar ca numărul de noduri cu grad impar să fie par. $\square$

A Doua Teoremă a Teoriei Grafurilor. Orice drum de la x la y conţine un drum elementar de la x la y.

DEMONSTRAŢIE: Fie $\pi = [x_1, \ldots, x_n]$ un drum de la x la y, adică un drum în care $x_1 = x$ şi $x_n = y$. Demonstrăm teorema prin inducţie după lungimea n a drumului. Dacă $n = 1$ atunci $x = x_1 = x_n = y$, deci $\pi = [x]$ este drum elementar. Dacă $n > 1$ şi π nu este elementar, atunci există $1 \leq i < j \leq n$ cu $x_i = x_j$ şi avem situaţia ilustrată mai jos:



$\pi = [x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n]$ $\qquad$ $\pi' = [x_1, \ldots, x_i, x_{j+1}, \ldots, x_n]$

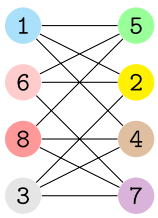
Rezultă că $\pi' = [x_1, \ldots, x_i, x_{j+1}, \ldots, x_n]$ este un drum de la $x_1 = x$ la $x_n = y$. Lungimea lui π' este $n - (j - i) < n$. Conform ipotezei inductive, drumul π conţine un drum elementar π''. Deoarece π îl conţine pe π', rezultă că π îl conţine şi pe π''. $\square$

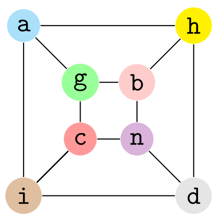
2.1.3 Grafuri izomorfe

Două grafuri sunt considerate *identice*, în sensul că au aceeaşi structură, dacă putem redenumi nodurile primului graf astfel încât să coincidă cu al doilea graf. În teoria grafurilor, acest proces de redenumire a nodurilor este descris de o funcţie bijectivă numită **izomorfism**:

- ▷ Două grafuri neorientate simple G, H sunt **izomorfe**, şi scriem $G \simeq H$, dacă există o bijecţie $\varphi : V(G) \to V(H)$ astfel încât $x{-}y \in E(G)$ dacă şi numai dacă $\varphi(x){-}\varphi(y) \in E(H)$.
- ▷ Două grafuri orientate simple G, H sunt **izomorfe**, şi scriem $G \simeq H$, dacă există o bijecţie $\varphi : V(G) \to V(H)$ astfel încât $x{\to}y \in E(G)$ dacă şi numai dacă $\varphi(x){\to}\varphi(y) \in E(H)$.

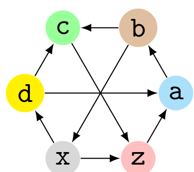
Exemplul 2. Grafurile ilustrate mai jos sunt izomorfe deşi reprezentările lor vizuale arată diferit:

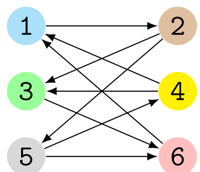
G_1: 

H_1: 

$G_1 \simeq H_1$ fiindcă funcţia φ de mai jos este izomorfism:

$\varphi(\texttt{1}) = \texttt{a}$, $\varphi(\texttt{2}) = \texttt{h}$,
$\varphi(\texttt{3}) = \texttt{d}$, $\varphi(\texttt{4}) = \texttt{i}$,
$\varphi(\texttt{5}) = \texttt{g}$, $\varphi(\texttt{6}) = \texttt{b}$,
$\varphi(\texttt{7}) = \texttt{n}$, $\varphi(\texttt{8}) = \texttt{c}$.

G_2: 

H_2: 

$G_2 \simeq H_2$ fiindcă funcţia φ de mai jos este izomorfism:

$\varphi(\texttt{a}) = \texttt{1}$, $\varphi(\texttt{b}) = \texttt{2}$,
$\varphi(\texttt{c}) = \texttt{3}$, $\varphi(\texttt{d}) = \texttt{4}$,
$\varphi(\texttt{x}) = \texttt{5}$, $\varphi(\texttt{z}) = \texttt{6}$.

$\square$

„$\simeq$" este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea grafurilor, iar aflarea răspunsului la întrebarea „$G \simeq H$?" este o problemă a cărei clasă de complexitate nu ştim dacă este polinomială sau NP completă. În prezent, cel mai eficient program de testare a izomorfismului este Nauty (abreviere de la *No AUTomorphisms, Yes?*), propus de McKay [10] şi implementat în C. În 2015, Babai a anunţat descoperirea unui algoritm de testare a izomorfismului de grafuri în timp quasipolinomial $2^{O((\log n)^c)}$ unde $c > 0$ este o constantă [4].

2.1.4 Conectivitate

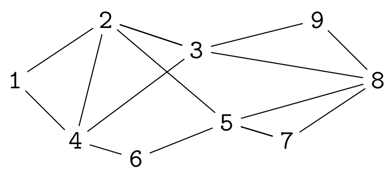
Fie $G = (V, E)$ un graf. Un **drum** (sau **cale**) de la x_1 la x_k în G este o listă de noduri $\pi = [x_1, x_2, \ldots, x_k]$ cu proprietatea că

1. $(x_i{-}x_{i+1}) \in E$ pentru toţi $1 \leq i < k$ dacă G este graf neorientat. O altă notaţie folosită pentru acest drum este $x_1{-}x_2{-}\ldots{-}x_k$.

2. $(x_i{\to}x_{i+1}) \in E$ pentru toţi $1 \leq i < k$ dacă G este digraf. O altă notaţie folosită pentru acest drum este $x_1{\to}x_2{\to}\ldots{\to}x_k$.

Vom scrie $x \rightsquigarrow y$ ca să indicăm că există un drum de la x la y, şi $x \overset{\pi}{\rightsquigarrow} y$ ca să indicăm că π este un drum de la x la y. Un drum este **elementar** dacă nu conţine de mai multe ori acelaşi nod, şi **simplu** dacă nu conţine de mai multe ori aceeaşi muchie. Un **ciclu** este un drum simplu $[x_1, x_2, \ldots, x_k, x_1]$. Ciclul este **elementar** dacă $[x_1, x_2, \ldots, x_k]$ este drum elementar. Orice drum sau ciclu elementar este simplu, dar reciproca nu este adevărată. **Lungimea** unui drum sau ciclu este numărul de muchii din el. Un drum sau ciclu este **hamiltonian** dacă este elementar şi trece prin toate nodurile grafului. Un drum este **eulerian** dacă este simplu şi traversează toate muchiile grafului. Un graf este hamiltonian dacă are un ciclu hamiltonian, şi eulerian dacă are un ciclu eulerian.

Exemplul 3. G:



Graful G este hamiltomian şi eulerian pentru că

- are ciclul hamiltonian $[1, 2, 3, 9, 8, 7, 5, 6, 4, 1]$.

- are ciclul eulerian $[1, 2, 4, 6, 5, 7, 8, \ 3, 9, 8, 5, 2, 3, 4, 1]$.

$[1, 2, 3, 4, 2, 3, 8]$ este un drum de la 1 la 8 care

- nu este simplu pentru că traversează de 2 ori muchia $2{-}3$,

- nu este elementar pentru că trece de 2 ori prin nodurile 2 şi 3.

Drumul $[2, 3, 8, 9, 3, 4]$ este simplu dar nu este elementar.

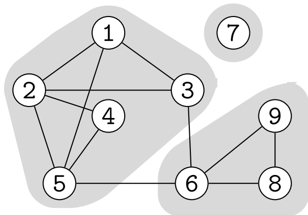
Drumul $[1, 2, 3, 9, 8, 7, 5, 6, 4]$ este elementar. □

2.1.5 Componente conexe

Componentele conexe sunt definite pentru grafuri neorientate. În această subsecţiune presupunem că G este graf neorientat.

Două noduri sunt **conectate** dacă există un drum de la unul la celălalt. Se observă că relaţia de conectivitate $\rightsquigarrow$ este o relaţie de echivalenţă pe $V(G)$. Clasele de echivalenţă ale lui $\rightsquigarrow$ se numesc **componente conexe** ale lui G. G este **conex** dacă are o singură componentă conexă, adică dacă oricare două noduri din $V(G)$ sunt conectate.

Exemplul 4. Graful din Exemplul 2 este conex, iar graful



are 3 componente conexe: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\{6, 8, 9\}$ şi $\{7\}$. □

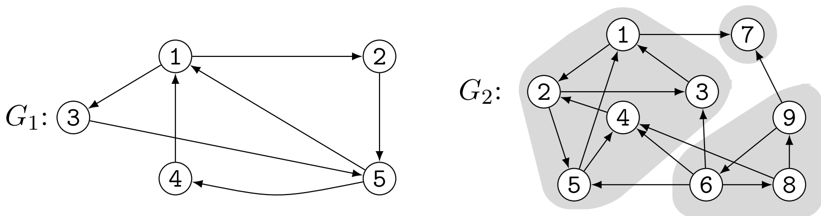
2.1.6 Componente tare conexe

Componentele tari sunt definite pentru grafuri orientate. În această subsecţiune presupunem că G este un digraf. Relaţia binară $\sim_{ct}$ definită pe $V(G)$ astfel:

$$x \sim_{ct} y :\Leftrightarrow x \rightsquigarrow y \text{ şi } y \rightsquigarrow x$$

este o relaţie de echivalenţă numită **conectivitate tare**. Clasele de echivalenţă ale lui $\sim_{ct}$ sunt **componentele tari** ale lui G. G este **tare conex** dacă are o singură componentă tare.

Exemplul 5. Fie G_1 şi G_2 digrafurile



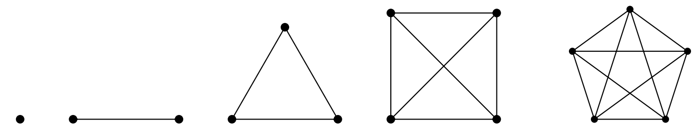
G_1 este tare conex, iar G_2 are trei componente tari: $C_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $C_2 = \{6, 8, 9\}$ şi $C_3 = \{7\}$. □

2.1.7 Clase de grafuri

K_n este **graful complet** de ordinul n. Acesta are

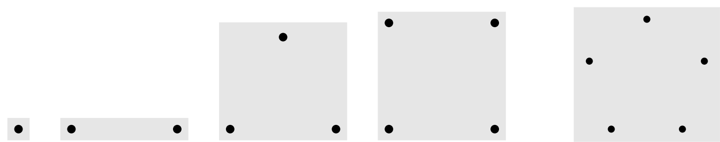
$$V(K_n) = \{1, 2, \ldots, n\} \text{ şi } E(K_n) = \{i{-}j \mid 1 \le i \ne j \le n\}.$$

K_n are n noduri şi $n(n-1)/2$ muchii.



K_1 K_2 K_3 K_4 K_5

E_n este **graful nul** de ordinul n. Acesta are $V(E_n) = \{1, 2, \ldots, n\}$ şi $E(E_n) = \emptyset$, adică n noduri şi nici o muchie.

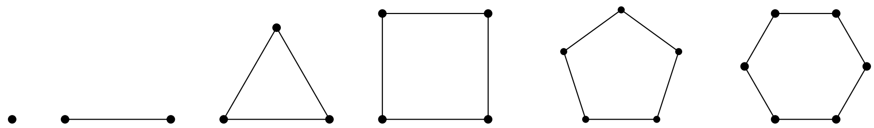


E_1 E_2 E_3 E_4 E_5

C_n este **graful ciclic** de ordinul n. Acesta are

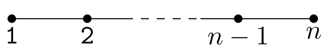
$$V(C_n) = \{1, 2, \ldots, n\} \text{ şi } E(C_n) = \{i{-}j \mid 1 \le i \le n, j = 1 + (i \mod n)\}.$$

C_n are n noduri şi n muchii.



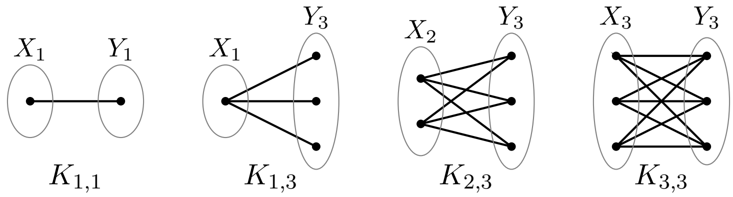
C_1 C_2 C_3 C_4 C_5 C_6

P_n este **drumul de ordinul** n. Acesta are $V(P_n) = \{1, 2, \ldots, n\}$ şi mulţimea de muchii $E(P_n) = \{i{-}j \mid 1 \le i < n, j = i + 1\}$.



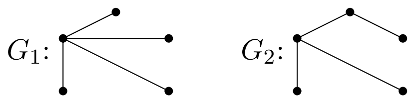
P_n are n noduri şi $n-1$ muchii.

Clasa **grafurilor bipartite complete** $K_{m,n}$ este definită pentru numere naturale strict pozitive m, n. $K_{m,n}$ este graful neorientat cu mulţimea de noduri $V(K_{m,n}) = X_m \cup Y_n$ unde $X_m = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, $Y_n = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, şi mulţimea de noduri $E(K_{m,n}) = \{x_i{-}y_j \mid \langle x_i, y_j\rangle \in X_m \times Y_n\}$. De exemplu



$K_{m,n}$ are $m+n$ noduri şi $m \cdot n$ muchii. Mulţimea de noduri a lui $K_{m,n}$ este o reuniune de 2 submulţimi disjuncte X_m şi Y_n, iar toate muchiile sunt între un nod din X_m şi un nod din Y_n.

Un **arbore de ordinul** n este un graf neorientat cu n noduri care este conex şi fără cicluri. Mulţimea, sau clasa, acestor arbori, se notează cu T_n. De exemplu, grafurile de mai jos sunt arbori din clasa T_5:

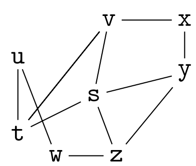


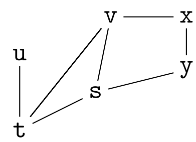
Secvenţele de grade ale arborilor G_1, G_2, G_3 sunt $[4,1,1,1,1]$, $[3,2,1,1,1]$ şi $[2,2,2,1,1]$. Deoarece sunt diferite, rezultă că $G_i \not\simeq G_j$ dacă $1 \leq i < j \leq 3$.

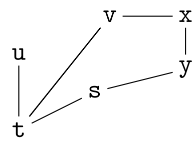
Orice arbore din clasa T_n are n noduri şi $n-1$ muchii.

2.1.8 Grafuri parţiale, subgrafuri şi subdiviziuni

Fie $G = (V, E)$ un graf şi $S \subseteq V$. Un **graf parţial** al lui G este un graf (V, E') cu $E' \subseteq E$. **Subgraful indus** de S în G este graful $G[S] = (S, E')$ unde $E' = \{e \in E \mid e$ este incidentă doar la noduri din $S\}$. Spunem că H este **subgraf** al lui G (sau că H este **conţinut** în G) dacă $H = G[S]$ pentru o mulţime de noduri $S \subseteq V$. Un **subgraf parţial** al lui G este un graf parţial al unui subgraf al lui G.

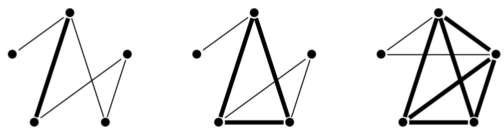
Exemplul 6. Fie G graful 

Un subgraf al lui G este subgraful indus $G[\{\mathtt{u}, \mathtt{v}, \mathtt{x}, \mathtt{y}, \mathtt{s}, \mathtt{t}\}]$: 

iar un subgraf parţial al lui G este 

□

O n-**clică**, sau doar **clică**, a unui graf neorientat G este un subgraf izomorf cu K_n al lui G. De exemplu, fiecare din grafurile G_n de mai jos are o n-clică ale cărei muchii le-am indicat cu linii îngroşate.

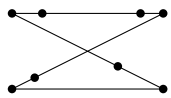
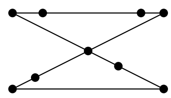


G_2 G_3 G_4

Un graf obţinut prin **inserarea unui nod nou** z pe o muchie $e \in E(G)$ este graful $(V(G) \cup \{z\}, (E(G) - \{e\}) \cup \{e_1, e_2\})$ unde

- $e_1 = x{-}z$ şi $e_2 = z{-}y$ dacă $e = x{-}y$.
- $e_1 = x{\rightarrow}z$ şi $e_2 = z{\rightarrow}y$ dacă $e = x{\rightarrow}y$.

O **subdiviziune** a lui G este un graf obţinut prin una sau mai multe inserări succesive de noduri noi pe muchiile lui G.

Exemplul 7. Fie grafurile G_1:  şi G_2: 

G_1 este o subdiviziune a lui $K_{2,2}$. G_2 nu este subdiviziune a lui $K_{2,2}$. □

2.1.9 Operaţii pe grafuri

Fie G un graf, $S \subseteq V(G)$ şi $T \subseteq E(G)$. Definim operaţiile:

- $G - S$ este subgraful indus $G[V(G) - S]$. Scriem $G - x$ în loc de $G - \{x\}$.
- $G - T$ este graful parţial G' cu $V(G') = V(G)$ şi $E(G') = E(G) - T$. Scriem $G - e$ în loc de $G - \{e\}$.
- Graful $G \setminus S$ obţinut prin contracţia nodurilor din S este graful cu
  - $V(G \setminus S) = (V(G) - S) \cup \{x_S\}$ unde x_S este un nod nou care înlocuieşte toate nodurile din S.
  - Dacă G este neorientat atunci $E(G \setminus S)$ este

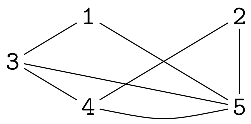
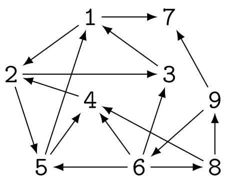
$$\{x{-}y \mid x, y \in V(G) - S \text{ şi } x{-}y \in E(G)\} \cup$$
$$\{x{-}x_S \mid \text{există } x{-}y \in E(G) \text{ cu } x \in V(G) - S \text{ şi } y \in S\}.$$

iar dacă G este orientat atunci

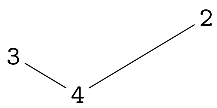
$$\begin{aligned} E(G \setminus S) = & \{x \to y \mid x, y \in V(G) - S \text{ şi } x \to y \in E(G)\} \cup \\ & \{x \to x_S \mid \text{există } x \to y \in E(G) \text{ cu } \\ & \ x \in V(G) - S \text{ şi } y \in S\} \cup \\ & \{x_S \to y \mid \text{există } x \to y \in E(G) \text{ cu } \\ & \ x \in S \text{ şi } y \in V(G) - S\}. \end{aligned}$$

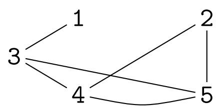
- Graful $G \setminus e$ obţinut prin contracţia muchiei e este graful $G \setminus S$ unde S este mulţimea de noduri incidente la e.

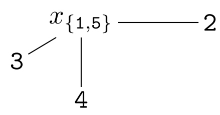
Exemplul 8. Fie G_1 şi G_2 grafurile următoare:

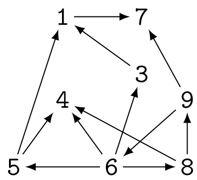
G_1:

G_2:


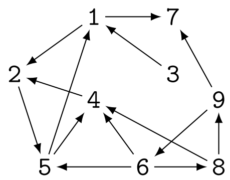
Mai jos sunt ilustrate efectele acestor operaţii.

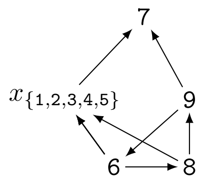

$G_1 - \{1,5\}$

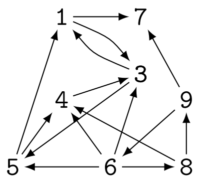

$G_1 - (1{-}5)$


$G_1 \setminus \{1,5\} = G_1 - (1{-}5)$


$G_2 - 2$


$G_2 - \{2 \to 3, 6 \to 3\}$


$G_2 \setminus \{1,2,3,4,5\}$


$G_2 \setminus (2 \to 3)$

2.1.10 Statistici descriptive

Statistica descriptivă a grafurilor cuprinde calculul unor valori numerice care ne permit să ne formăm o părere generală despre structura unui graf. Aceste valori sunt utile mai ales în analiza grafurilor mari, cu sute de mii sau milioane de noduri sau muchii, care sunt greu de vizualizat în detaliu.

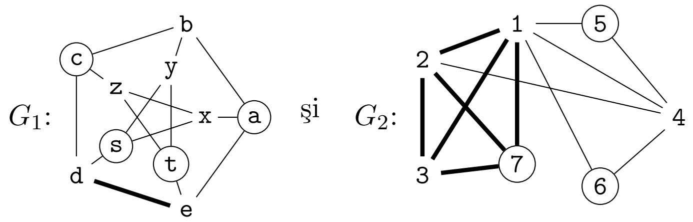
Cele mai importante valori caracteristice ale un graf au fost deja definite, şi sunt: (1) ordinul, adică numaărul total de noduri. (2) mărimea, adică numărul total de conexiuni, şi (3) $\delta(G)$ şi $\Delta(G)$, care sunt limitele între care variază numărul de vecini ai unui nod. Alte valori caracteristice importante sunt: numărul de independenţă, numărul de clică, gradul de conectivitate, raza ąi diametrul. Aceste valori statistice descriptive vor fi definite în continuare.

Fie G un graf neorientat.

- O mulţime de noduri $S \subseteq V(G)$ este **stabilă** sau **independentă** în G dacă nu există nici o muchie între nodurile sale, adică $x{-}y \notin E(G)$ pentru orice $x, y \in S$. **Numărul de independenţă** $\alpha(G)$ al lui G este numărul maxim de noduri din o mulţime stabilă a lui G, adică $\alpha(G) = \max\{|S| \mid S \text{ este mulţime independentă în } G\}$.

- **Numărul de clică** $\omega(G)$ al lui G este ordinul maxim al unei clici din G, adică $\omega(G) = \max\{n \mid H \text{ este } n\text{-clică a lui } G\}$.

Exemplul 9. Fie grafurile



G_1 este graful lui Petersen. G_1 are numărul de independenţă $\alpha(G_1) = 4$ şi numărul de clică $\omega(G_1) = 2$. În G_1, $\{\mathtt{a}, \mathtt{c}, \mathtt{s}, \mathtt{t}\}$ şi $\{\mathtt{x}, \mathtt{y}, \mathtt{s}, \mathtt{t}\}$ sunt mulţimi stabile maxime (mai sunt şi altele), iar o clică de ordin maxim este $G_1[\{\mathtt{d}, \mathtt{e}\}]$.

$\alpha(G_2) = 3$ şi $\omega(G_2) = 4$. În G_2, o mulţime stabilă maximă este $\{5, 6, 7\}$ iar o clică de ordin maxim este $G_1[\{1, 2, 3, 7\}]$. $\square$

Fie G un graf neorientat conex.

- $x \in V(G)$ este **nod de articulaţie** (engl. *cut vertex*) dacă $G - x$ nu este conex. Altfel spus, ştergerea lui e distruge conectivitatea lui G.

- $e \in E(G)$ este o **punte** (engl. *bridge*) dacă $G - e$ nu este conex. Altfel spus, ştergerea muchiei e distruge conectivitatea lui G.

- $S \subsetneq V(G)$ este o **mulţime de articulaţie** (engl. *vertex cut set*) a lui G dacă graful $G - S$ nu este conex. Altfel spus, ştergerea nodurilor din S distruge conectivitatea lui G.

- **Gradul de conectivitate** $\kappa(G)$ al unui graf incomplet G este numărul minim de noduri ce trebuie eliminate din G pentru a-l deconecta, adică

  $$\kappa(G) = \min\{|S| \mid S \text{ este mulţime de articulaţie a lui } G\}.$$

  Dacă k este un întreg strict pozitiv, spunem că G este **k-conex** dacă $k \leq \kappa(G)$.

- **Distanţa** $d(x, y)$ de la x la y este cea mai mică lungime a unui drum de la x la y.

- **Excentricitatea** $e(x)$ a nodului x este distanţa cea mai mare de la x la un nod în G, adică $e(x) = \max\{d(x, y) \mid y \in V(G)\}$.

- **Centrul** lui G este mulţimea nodurilor cu excentricitate minimă.

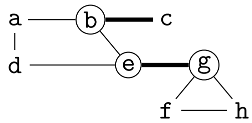
- **Periferia** lui G este mulţimea nodurilor cu excentricitate maximă.

- **Raza** lui G este excentricitatea unui nod din centrul lui G, adică $radius(G) = \min\{e(x) \mid x \in V(G)\}$.

- **Diametrul** lui G este excentricitatea unui nod de la periferia lui G, adică $diam(G) = \max\{e(x) \mid x \in V(G)\}$.

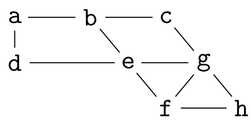
Exemplul 10. Graful conex

G_1:



are 3 puncte de articulaţie (cele încercuite) şi 2 punţi (cele îngroşate). Deci $\kappa(G_1) = 1$. Graful conex

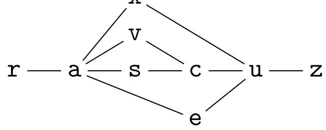
G_2:



nu are puncte de articulaţie şi nici punţi, dar are mulţimi de articulaţie cu 2 noduri, de exemplu $\{\mathtt{c}, \mathtt{e}\}$, $\{\mathtt{f}, \mathtt{g}\}$ sau $\{\mathtt{b}, \mathtt{e}\}$. Deci $\kappa(G_2) = 2$. □

Exemplul 11. În graful conex

G:



avem $d(\mathtt{x},\mathtt{c}) = 2$, $d(\mathtt{r},\mathtt{z}) = 4$, $e(\mathtt{x}) = 2$, $e(\mathtt{z}) = 4$, $radius(G) = 2$ şi $diam(G) = 4$. G are centrul $\{\mathtt{x},\mathtt{e}\}$ şi periferia $\{\mathtt{r},\mathtt{z}\}$. □

2.1.11 Concluzii

În secţiunea introductivă 2.1 an descris diferitele tipuri de grafuri şi vocabularul teoriei grafurilor. Reţinem că:

- Grafurile sunt modele de relaţii binare între componentele unui sistem. Ele sunt perechi (V, E) în care V este o mulţime de noduri (sau vârfuri) iar E este o mulţime de muchii. Nodurile reprezintă componentele unui sistem, iar muchiile reprezintă muchiile dintre ele.

- Grafurile sunt neorientate sau orientate. Grafurile orientate se numesc şi digrafuri.

  - Un graf neorientat are $E \subseteq \{\{x, y\} \mid x, y \in V\}$. Scriem $x{-}y$ în loc de $\{x, y\}$ şi numim nodurile x, y capetele muchiei $x{-}y$. Muchiile sunt neorientate pentru că $x{-}y$ coincide cu $y{-}x$.
  - Un digraf are $E \subseteq V \times V$. Scriem $x{\to}y$ în loc de $\langle x, y\rangle$ şi numim nodurile x, y capetele muchiei $x{\to}y$. Muchiile sunt orientate pentru că, dacă $x \neq y$, atunci $x{\to}y \neq y{\to}x$. O muchie orientată se numeşte arc.

  O buclă este o muchie ale cărei capete coincid, adică $x{-}x$ sau $x{\to}x$.

- Fiecare muchie e are o multiplicitate $m(e) \in \mathbb{N} - \{0\}$. Distingem trei tipuri de grafuri: grafuri simple, pseudografuri şi multigrafuri. Un graf simplu nu are bucle şi toate muchiile au multiplicitatea 1. Un pseudograf nu are bucle dar are muchii cu multiplicitate mai mare ca 1. Un multigraf are bucle şi muchii cu multiplicitate mai mare ca 1.

- Un graf ponderat are şi o funcţie $w : E \to \mathbb{R}$ care asociază fiecărei muchii e o pondere $w(e)$.

2.1.12 Exerciţii

1. Există un graf simplu neorientat cu secvenţa de grade $[3, 3, 5, 6, 6, 6, 6]$?

2. Există un graf simplu neorientat cu n noduri şi secvenţa de grade $[0, 1, 2, \ldots, n-2, n-1]$?