Curs 6

Probleme de ocupare

Noiembrie 2020

Probleme de ocupare

(engl. *cccupancy problems*)

Numărarea posibilităților de aranjare a elementelor unei colecții în grupuri (engl. *bins*).
Sunt de 4 feluri:

- dacă se face sau nu distincție între elementele colecției.
- dacă se face sau nu distincție între grupuri identice.

Numărarea posibilităților de aranjare a elementelor unei colecții în grupuri (engl. *bins*).

Sunt de 4 feluri:

- dacă se face sau nu distincție între elementele colecției.
- dacă se face sau nu distincție între grupuri identice.

În acest curs vom analiza 3 probleme de ocupare.

- **Problema 1:** În câte feluri se pot împărți $n > 0$ elemente identice în grupuri nevide? Nu se face distincție între grupuri cu același număr de elemente.

$\Leftrightarrow$ În câte feluri putem scrie $n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ cu $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$, $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_k > 0$.

Acest număr se numește număr de partiții al lui n, și-l notăm cu p_n.

Exemplu

$p_6 = 11$ pentru că 6 poate fi partiționat în 11 feluri:

$$\begin{aligned}6 &= 5+1 = 4+2 = 3+3 = 4+1+1 = 3+2+1 = 2+2+2\\ &= 3+1+1+1 = 2+2+1+1 = 2+1+1+1+1\\ &= 1+1+1+1+1+1.\end{aligned}$$

Fie $n > 0$ și $p_{n,k}$ numărul de posibilități să scriem

$$n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k \text{ cu } a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_k > 0.$$

Observăm că $p_n = p_{n,1} + p_{n,2} + \ldots + p_{n,n}$ și

- $p_{n,1} = 1$: singura posibilitate este $n = n$.
- $p_{n,n} = 1$: singura posibilitate este $n = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ ori}}$.
- dacă $k < 1$ sau $k > n$ atunci $p_{n,k} = 0$ (evident).

Fie $n > 0$ și $p_{n,k}$ numărul de posibilități să scriem

$$n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k \text{ cu } a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_k > 0.$$

Observăm că $p_n = p_{n,1} + p_{n,2} + \ldots + p_{n,n}$ și

- $p_{n,1} = 1$: singura posibilitate este $n = n$.
- $p_{n,n} = 1$: singura posibilitate este $n = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ ori}}$.
- dacă $k < 1$ sau $k > n$ atunci $p_{n,k} = 0$ (evident).
- Cum putem calcula $p_{n,k}$ când $1 < k < n$?

Numărăm în câte feluri putem scrie

$n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ cu $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_k > 0$.

1. Dacă $a_k = 1$ atunci $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_{k-1} > 0$ și

$$(n-1) = \underbrace{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}}_{k-1 \text{ numere}}$$

   este o partiție a lui $n-1 \Rightarrow p_{n-1,k-1}$ posibilități.

2. Dacă $a_k > 1$ atunci $a_1 - 1 \geq a_2 - 1 \geq \ldots \geq a_k - 1 > 0$ și

$$(n-k) = \underbrace{(a_1 - 1) + (a_2 - 1) + \ldots + (a_k - 1)}_{k \text{ numere}}$$

   este o partiție a lui $n-k \Rightarrow p_{n-k,k}$ posibilități.

$\Rightarrow p_{n,k} = p_{n-1,k-1} + p_{n-k,k}$ (regula sumei).

$$p_n = \sum_{k=1}^{n} p_{n,k} \quad \text{unde}$$

$$p_{n,1} = p_{n,n} = 1, p_{n,k} = 0 \quad \text{dacă } k < 1 \text{ sau } k > n,$$

$$p_{n,k} = p_{n-1,k-1} + p_{n-k,k} \quad \text{dacă } 1 < k < n.$$

Triunghiul infinit al numerelor $p_{n,k}$ se poate calcula recursiv:

$p_{n,k}$	$k=1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\ldots$	p_n
$n=1$	**1**											1
2	**1**	**1**										2
3	**1**	1	**1**									3
4	**1**	2	1	**1**								5
5	**1**	2	2	1	**1**							7
6	**1**	3	3	2	1	**1**						11
7	**1**	3	4	3	2	1	**1**					15
8	**1**	4	5	5	3	2	1	**1**				22
9	**1**	4	7	6	5	3	2	1	**1**			30
10	**1**	5	8	9	7	5	3	2	1	**1**		42
$\vdots$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$\ddots$	$\vdots$

Quiz. Folosind raționamentul combinatorial, demonstrați că

1. $p_{n,2} = \lfloor n/2 \rfloor$.
2. $p_{n,n-1} = \begin{cases} 0 & \text{dacă } n = 1, \\ 1 & \text{dacă } n > 1. \end{cases}$
3. $p_{n,n-2} = \begin{cases} 0 & \text{dacă } n < 3, \\ 1 & \text{dacă } n = 3, \\ 2 & \text{dacă } n > 3. \end{cases}$

- **Problema 2:** La un restaurant cu k mese rotunde sunt invitate n persoane numerotate de la 1 la n. În câte feluri pot fi puse cele n persoane la mese astfel încât fiecare masă să fie ocupată de către cel puțin o persoană?
  Mesele rotunde sunt identice, iar așezarea unui grup de persoane la o masă rotundă este un ciclu al elementelor din grup.
- Acest număr se numește număr Stirling de cicluri și se notează cu $\left[{n \atop k} \right]$.

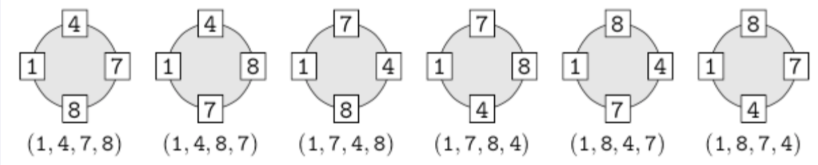
Numerele Stirling de cicluri $\left[{n \atop k}\right]$

Caz special: $k = 1$

Punerea la o masă rotundă a unui grup A de m persoane este un ciclu $(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ al elementelor din A

$\Rightarrow$ sunt $(m-1)!$ posibilități, deci $\left[{m \atop 1}\right] = (m-1)!$

Exemplu pentru $A = \{1, 4, 7, 8\}$.



$\langle 4, 7, 8\rangle, \langle 4, 8, 7\rangle, \langle 7, 4, 8\rangle, \langle 7, 8, 4\rangle, \langle 8, 4, 7\rangle, \langle 8, 7, 4\rangle$ sunt toate permutările mulțimii $\{4, 7, 8\}$.

- $\left[{n \atop n}\right] = 1$: singura posibilitate este să formăm ciclurile $(1), (2), \ldots, (n)$
- $\left[{n \atop k}\right] = 0$ dacă $k < 1$ sau $k > n$ (evident).
- Dacă $1 < k < n$ distingem 2 cazuri:

- $\left[{n \atop n}\right] = 1$: singura posibilitate este să formăm ciclurile $(1), (2), \ldots, (n)$
- $\left[{n \atop k}\right] = 0$ dacă $k < 1$ sau $k > n$ (evident).
- Dacă $1 < k < n$ distingem 2 cazuri:
  1. Persoanele $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ ocupă $k-1$ mese rotunde:
     - Sunt $\left[{n-1 \atop k-1}\right]$ posibilități.
     - Persoana n trebuie să se pună la masa liberă rămasă $\Rightarrow$ 1 posibilitate.

     $\Rightarrow \left[{n-1 \atop k-1}\right]$ posibilități (regula produsului)

- $\left[{n \atop n}\right] = 1$: singura posibilitate este să formăm ciclurile $(1), (2), \ldots, (n)$
- $\left[{n \atop k}\right] = 0$ dacă $k < 1$ sau $k > n$ (evident).
- Dacă $1 < k < n$ distingem 2 cazuri:
  1. Persoanele $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ ocupă $k-1$ mese rotunde:
     - Sunt $\left[{n-1 \atop k-1}\right]$ posibilități.
     - Persoana n trebuie să se pună la masa liberă rămasă $\Rightarrow$ 1 posibilitate.

     $\Rightarrow \left[{n-1 \atop k-1}\right]$ posibilități (regula produsului)
  2. Persoanele $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ ocupă k mese rotunde:
     - Sunt $\left[{n-1 \atop k}\right]$ posibilități.
     - Persoana n se poate pune în dreapta oricărei persoane din cele $n-1$ care stau deja la mese $\Rightarrow (n-1)$ posibilități

     $\Rightarrow (n-1) \cdot \left[{n-1 \atop k}\right]$ posibilități (regula produsului)

- $\left[{n \atop n}\right] = 1$: singura posibilitate este să formăm ciclurile $(1), (2), \ldots, (n)$
- $\left[{n \atop k}\right] = 0$ dacă $k < 1$ sau $k > n$ (evident).
- Dacă $1 < k < n$ distingem 2 cazuri:
  1. Persoanele $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ ocupă $k-1$ mese rotunde:
     - Sunt $\left[{n-1 \atop k-1}\right]$ posibilități.
     - Persoana n trebuie să se pună la masa liberă rămasă $\Rightarrow$ 1 posibilitate.

     $\Rightarrow \left[{n-1 \atop k-1}\right]$ posibilități (regula produsului)
  2. Persoanele $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ ocupă k mese rotunde:
     - Sunt $\left[{n-1 \atop k}\right]$ posibilități.
     - Persoana n se poate pune în dreapta oricărei persoane din cele $n-1$ care stau deja la mese $\Rightarrow (n-1)$ posibilități

     $\Rightarrow (n-1) \cdot \left[{n-1 \atop k}\right]$ posibilități (regula produsului)

$\Rightarrow \left[{n \atop k}\right] = \left[{n-1 \atop k-1}\right] + (n-1) \cdot \left[{n-1 \atop k}\right]$ (regula sumei).

$$\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1, \quad \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!, \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = 0 \text{ dacă } k < 1 \text{ sau } k > n.$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1) \cdot \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} \quad \text{dacă } n > k > 1.$$

Triunghiul infinit al numerelor $\left[{n \atop k}\right]$ se poate calcula recursiv:

$\left[{n \atop k}\right]$	$k=1$	2	3	4	5	6	7	8	...
$n=1$	**1**								
2	**1**	**1**							
3	**2**	3	**1**						
4	**6**	11	6	**1**					
5	**24**	50	35	10	**1**				
6	**120**	274	225	85	15	**1**			
7	**720**	1764	1624	735	175	21	**1**		
8	**5040**	13068	13132	6769	1960	322	28	**1**	
$\vdots$	.	.	.	.	.	.	.	.	$\ddots$

Quiz. Folosind raționamentul combinatorial, demonstrați că

$$\begin{bmatrix} n \\ n-2 \end{bmatrix} = \begin{cases} 0 & \text{dacă } n < 3, \\ 2 & \text{dacă } n = 3, \\ \frac{n(n-1)(n-2)}{3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8} & \text{dacă } n > 3. \end{cases}$$

- O partiție a unei mulțimi finite nevide A este o mulțime de submulțimi $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ astfel încât
  1. $A_i \neq \emptyset$ pentru $1 \leq i \leq k$,
  2. $A_i \cap A_j = \emptyset$ dacă $i \neq j$, și
  3. $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = A$.
- **Problema 3:** În cate feluri se poate partiționa o mulțime cu $n > 0$ elemente în k submulțimi?
- Acest număr se numește număr Stirling de mulțimi și se notează cu $\left\{ {n \atop k} \right\}$.

- O partiție a unei mulțimi finite nevide A este o mulțime de submulțimi $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ astfel încât
  1. $A_i \neq \emptyset$ pentru $1 \leq i \leq k$,
  2. $A_i \cap A_j = \emptyset$ dacă $i \neq j$, și
  3. $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = A$.
- **Problema 3:** În cate feluri se poate partiționa o mulțime cu $n > 0$ elemente în k submulțimi?
- Acest număr se numește număr Stirling de mulțimi și se notează cu $\left\{ n \atop k \right\}$.

Exemplu pentru $A = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}\}$

$\left\{ 3 \atop 2 \right\} = 3$ pentru că sunt 3 partiții ale lui A în 3 submulțimi:

$$\{\{\mathrm{a}\}, \{\mathrm{b}, \mathrm{c}\}\},\ \{\{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}, \{\mathrm{c}\}\} \text{ și } \{\{\mathrm{a}, \mathrm{c}\}, \{\mathrm{b}\}\}.$$

Numerele Stirling de mulțimi $\left\{ {n \atop k} \right\}$

Formule de calcul

- $\left\{ {n \atop 1} \right\}$ pentru că singura partiție cu 1 submulțime este $\{\{1, 2, \ldots, n\}\}$.
- $\left\{ {n \atop n} \right\} = 1$ pentru că singura partiție cu n submulțimi este $\{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}\}$.
- $\left\{ {n \atop k} \right\} = 0$ dacă $k < 1$ sau $k > n$ (evident).
- Pentru $1 < k < n$ numărăm în câte feluri putem forma o partiție cu k submulțimi a mulțimii $\{1, 2, \ldots, n\}$. Sunt 2 posibilități:

Numerele Stirling de mulțimi $\genfrac\{\}{0pt}{}{n}{k}$

Formule de calcul

- $\genfrac\{\}{0pt}{}{n}{1}$ pentru că singura partiție cu 1 submulțime este $\{\{1, 2, \ldots, n\}\}$.
- $\genfrac\{\}{0pt}{}{n}{n} = 1$ pentru că singura partiție cu n submulțimi este $\{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}\}$.
- $\genfrac\{\}{0pt}{}{n}{k} = 0$ dacă $k < 1$ sau $k > n$ (evident).
- Pentru $1 < k < n$ numărăm în câte feluri putem forma o partiție cu k submulțimi a mulțimii $\{1, 2, \ldots, n\}$. Sunt 2 posibilități:
  1. Partiționăm $\{1, \ldots, n-1\}$ în $\{A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}\}$ (sunt $\genfrac\{\}{0pt}{}{n-1}{k-1}$ posib.) iar apoi adăugăm submulțimea $\{n\}$ la partiție (1 posib.). În acest caz sunt $\genfrac\{\}{0pt}{}{n-1}{k-1}$ posibilități (regula produsului).

Numerele Stirling de mulțimi $\left\{ {n \atop k} \right\}$

Formule de calcul

- $\left\{ {n \atop 1} \right\}$ pentru că singura partiție cu 1 submulțime este $\{\{1, 2, \ldots, n\}\}$.
- $\left\{ {n \atop n} \right\} = 1$ pentru că singura partiție cu n submulțimi este $\{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}\}$.
- $\left\{ {n \atop k} \right\} = 0$ dacă $k < 1$ sau $k > n$ (evident).
- Pentru $1 < k < n$ numărăm în câte feluri putem forma o partiție cu k submulțimi a mulțimii $\{1, 2, \ldots, n\}$. Sunt 2 posibilități:
  1. Partiționăm $\{1, \ldots, n-1\}$ în $\{A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}\}$ (sunt $\left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}$ posib.) iar apoi adăugăm submulțimea $\{n\}$ la partiție (1 posib.). În acest caz sunt $\left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}$ posibilități (regula produsului).
  2. Partiționăm $\{1, \ldots, n-1\}$ în $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ (sunt $\left\{ {n-1 \atop k} \right\}$ posib.) iar apoi adăugăm n la oricare din cele k submulțimi (sunt k posib.) În acest caz sunt $k \cdot \left\{ {n-1 \atop k} \right\}$ posibilități (regula produsului)

Numerele Stirling de mulțimi $\left\{{n \atop k}\right\}$

Formule de calcul

- $\left\{{n \atop 1}\right\}$ pentru că singura partiție cu 1 submulțime este $\{\{1, 2, \ldots, n\}\}$.
- $\left\{{n \atop n}\right\} = 1$ pentru că singura partiție cu n submulțimi este $\{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}\}$.
- $\left\{{n \atop k}\right\} = 0$ dacă $k < 1$ sau $k > n$ (evident).
- Pentru $1 < k < n$ numărăm în câte feluri putem forma o partiție cu k submulțimi a mulțimii $\{1, 2, \ldots, n\}$. Sunt 2 posibilități:
  1. Partiționăm $\{1, \ldots, n-1\}$ în $\{A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}\}$ (sunt $\left\{{n-1 \atop k-1}\right\}$ posib.) iar apoi adăugăm submulțimea $\{n\}$ la partiție (1 posib.). În acest caz sunt $\left\{{n-1 \atop k-1}\right\}$ posibilități (regula produsului).
  2. Partiționăm $\{1, \ldots, n-1\}$ în $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ (sunt $\left\{{n-1 \atop k}\right\}$ posib.) iar apoi adăugăm n la oricare din cele k submulțimi (sunt k posib.) În acest caz sunt $k \cdot \left\{{n-1 \atop k}\right\}$ posibilități (regula produsului)

$\Rightarrow \left\{{n \atop k}\right\} = \left\{{n-1 \atop k-1}\right\} + k \cdot \left\{{n-1 \atop k}\right\}$ (regula sumei)

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = 0 \quad \text{dacă } k < 1 \text{ sau } k > n$$
$$\left\{ {n \atop 1} \right\} = \left\{ {n \atop n} \right\} = 1$$
$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \cdot \left\{ {n-1 \atop k} \right\} \quad \text{dacă } n > k > 1.$$

Triunghiul infinit al numerelor $\left\{ {n \atop k} \right\}$ se poate calcula recursiv:

$\left\{ {n \atop k} \right\}$	$k = 1$	2	3	4	5	6	7	8	...
$n = 1$	**1**								
2	**1**	**1**							
3	**1**	3	**1**						
4	**1**	7	6	**1**					
5	**1**	15	25	10	**1**				
6	**1**	31	90	65	15	**1**			
7	**1**	63	301	350	140	21	**1**		
8	**1**	127	966	1701	1050	266	28	**1**	
⋮	.	.	.	.	.	.	.	.	⋱

Quiz. Câte șiruri de 20 litere se pot forma dacă se folosesc litere din mulțimea $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}, \mathtt{e}, \mathtt{f}, \mathtt{g}\}$ și fiecare literă apare cel puțin o dată?

Sugestie: Pentru fiecare literă $\alpha \in \{\mathtt{a}, \mathtt{c}, \mathtt{c}, \mathtt{d}, \mathtt{e}, \mathtt{f}, \mathtt{g}\}$, fie P_α pozițiile la care apare α în șir. De exemplu, dacă șirul de 20 litere este

$$\mathtt{ababcdgegfggbbaddaef}$$

atunci $P_\mathtt{a} = \{1, 3, 15, 18\}$, $P_\mathtt{b} = \{2, 4, 13, 14\}$, $P_\mathtt{c} = \{5\}$, $P_\mathtt{d} = \{6, 16, 17\}$, $P_\mathtt{e} = \{8, 19\}$, $P_\mathtt{f} = \{10, 20\}$, $P_\mathtt{g} = \{7, 9, 11, 12\}$.

- Observați că $\{P_\mathtt{a}, P_\mathtt{b}, P_\mathtt{c}, P_\mathtt{d}, P_\mathtt{e}, P_\mathtt{f}, P_\mathtt{g}\}$ este partiție a mulțimii $\{1, 2, \ldots, 20\}$.

Concluzii

Rezumat al formulelor de numărare prezentate în acest curs

p_n	$\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}$
$p_{n,k}$	$p_{n,1} = p_{n,n} = 1.$ $p_{n,k} = 0 \quad \text{dacă } k < 1 \text{ sau } k > n.$ $p_{n,k} = p_{n-1,k-1} + p_{n-k,k} \quad \text{dacă } n > k > 1.$
$\binom{n}{k}$	$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$ $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \quad \text{dacă } n > k > 0.$
$\left[{n \atop k}\right]$	$\left[{n \atop n}\right] = 1, \left[{n \atop 1}\right] = (n-1)!.$ $\left[{n \atop k}\right] = 0 \text{ dacă } k < 1 \text{ sau } k > n.$ $\left[{n \atop k}\right] = \left[{n-1 \atop k-1}\right] + (n-1) \cdot \left[{n-1 \atop k}\right] \quad \text{dacă } n > k > 1.$
$\left\{{n \atop k}\right\}$	$\left\{{n \atop k}\right\} = 0 \quad \text{dacă } k < 1 \text{ sau } k > n.$ $\left\{{n \atop 1}\right\} = \left\{{n \atop n}\right\} = 1.$ $\left\{{n \atop k}\right\} = \left\{{n-1 \atop k-1}\right\} + k \cdot \left\{{n-1 \atop k}\right\} \quad \text{dacă } n > k > 1.$