## 1.7 Probleme de ocupare

În combinatorică, multe probleme interesante se reduc la numărarea posibilităţilor de aranjare în grupuri (engl. *bins*) a elementelor unei colecţii. Aceste probleme se numesc **probleme de ocupare** (engl. *occupancy problems*) şi pot fi de patru feluri:

▷ dacă se face sau nu distincţie între elementele colecţiei,

▷ dacă se face sau nu distincţie între grupuri identice.

Vom analiza trei probleme de ocupare.

1. În câte feluri se pot împărţi $n$ elemente identice în grupuri nevide? Nu se face distincţie între grupuri cu acelaşi număr de elemente.

2. În câte feluri se pot împărţi $n$ elemente distincte ale unei mulţimi în $k$ grupuri ciclice? Reamintim faptul că

   - un grup ciclic cu $m$ elemente, sau ciclu, este o funcţie bijectivă $\pi : \{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \to \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ astfel încât $\pi(a_i) = a_{i+1}$ pentru $1 \leq i < m$ şi $\pi(a_m) = a_1$.
   - De obicei, pentru un astfel de ciclu folosim notaţia $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$.

3. În câte feluri se pot împărţi $n$ elemente distincte ale unei mulţimi în $k$ grupuri nevide? Ordinea elementelor în fiecare grup este irelevantă.

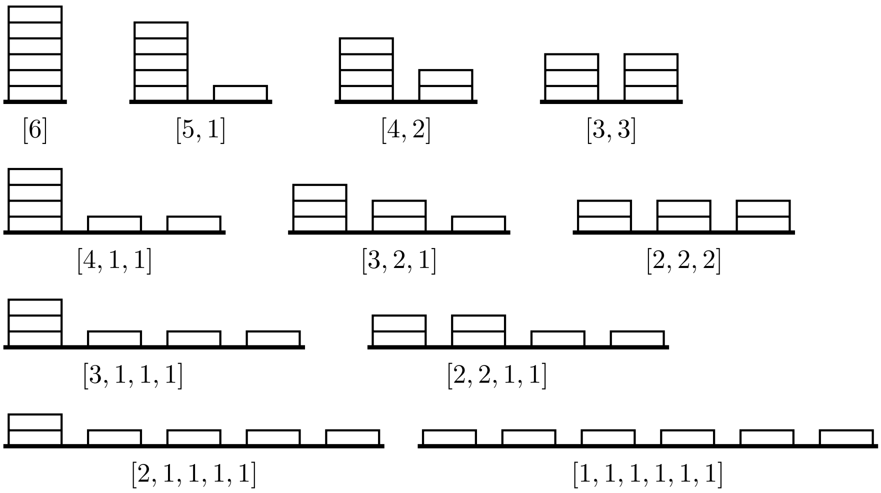
Răspunsul la prima problemă coincide cu numărul de posibilităţi de a scrie $n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ cu $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_k > 0$. Acest număr se numeşte **număr de partiţii al lui** $n$, şi-l notăm $p_n$.

Răspunsul la a doua problemă se numeşte **număr Stirling de cicluri**, şi-l notăm cu $\left[{n \atop k}\right]$. Răspunsul la a treia problemă se numeşte **număr Stirling de mulţimi**, şi-l notăm cu $\left\{{n \atop k}\right\}$.

Vor fi prezentate formule de calcul pentru numerele $p_n$, $\left[{n \atop k}\right]$ şi $\left\{{n \atop k}\right\}$.

### 1.7.1 Partiţii

Presupunem că un jucator de poker are $n \geq 1$ jetoane identice pe care le pune în mai multe stive ca să-şi intimideze adversarii. Stivele de disting între ele doar prin numărul de jetoane. Câte posibilităţi are jucătorul pentru aranjarea jetoanelor în stive?
Vom scrie $p_n$ pentru acest număr. De exemplu, $p_6 = 11$ pentru că sunt 11 posibilităţi de a pune 6 jetoane în stive:

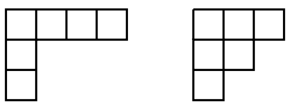



Fiecare posibilitate corespunde unei liste de numere întregi $[a_1, a_2, \ldots, a_k]$ astfel încât $n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ şi $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_k > 0$. Fiecare astfel de listă se numeşte **partiţie** a numărului întreg $n$.

În acest exemplu, am văzut că $n = 6$ se descompune în astfel de sume în 11 feluri:

$$\begin{aligned} 6 &= 5+1 = 4+2 = 3+3 = 4+1+1 = 3+2+1 = 2+2+2 \\ &= 3+1+1+1 = 2+2+1+1 = 2+1+1+1+1 \\ &= 1+1+1+1+1+1. \end{aligned}$$

O altă reprezentare frecvent întâlnită a acestor posibilităţi este cu **diagrame Young**. Diagrama Young a unei partiţii $[a_1, a_2, \ldots, a_k]$ a lui $n$ conţine $n$ pătrate aranjate pe $k$ rânduri, cu $a_1$ pătrate adiacente pe rândul de sus, $a_2$ pătrate adiacente pe rândul al doilea, şi aşa mai departe. Toate rândurile sunt aliniate la stânga. De exemplu, diagramele Young ale partiţiilor $[4, 1, 1]$ şi $[3, 2, 1]$ sunt



$[4, 1, 1]$ $[3, 2, 1]$

Fie $p_{n,k}$ numărul partiţiilor $[a_1, a_2, \ldots, a_k]$ ale lui $n$. Observăm că

$$p_n = \sum_{k=1}^{n} p_{n,k}, \quad p_{n,1} = p_{n,n} = 1 \text{ şi } p_{n,k} = 0 \text{ dacă } k < 1 \text{ sau } k > n.$$

Dacă $1 < k < n$, distingem 2 posibilităţi:

- Dacă $a_k = 1$ atunci: $[a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k]$ este o partiţie a lui $n$ dacă şi numai dacă $[a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}]$ este o partiţie a lui $n-1$. Rezultă că numărul partiţiilor $[a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, 1]$ ale lui $n$ este $p_{n-1,k-1}$.
- Dacă $a_k > 1$ atunci: $[a_1, a_2, \ldots, a_k]$ este o partiţie a lui $n$ dacă şi numai dacă $[a_1 - 1, a_2 - 1, \ldots, a_k - 1]$ este o partiţie a lui $n-k$. Rezultă că numărul partiţiilor $[a_1, a_2, \ldots, a_k]$ lui $n$ cu $a_k > 1$ este $p_{n-k,k}$.

Conform regulii sumei, $p_{n,k} = p_{n-1,k-1} + p_{n-k,k}$.

Deci formula de calcul al lui $p_n$ pentru $n > 0$ este

$$\boxed{\begin{aligned} p_n &= \sum_{k=1}^{n} p_{n,k} \quad \text{unde} \\ p_{n,1} = p_{n,n} = 1, p_{n,k} &= 0 \quad \text{dacă } k < 1 \text{ sau } k > n, \\ p_{n,k} = p_{n-1,k-1} + p_{n-k,k} & \quad \text{dacă } 1 < k < n. \end{aligned}} \tag{1.24}$$

Aceste relaţii de recurenţă ne permit să completăm incremental tabelul triunghiular de valori nenule pentru $p_{n,k}$ şi $p_n$ ilustrat mai jos:

| $p_{n,k}$ | $k=1$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | $\ldots$ | $p_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n=1$ | **1** | | | | | | | | | | | 1 |
| 2 | **1** | **1** | | | | | | | | | | 2 |
| 3 | **1** | 1 | **1** | | | | | | | | | 3 |
| 4 | **1** | 2 | 1 | **1** | | | | | | | | 5 |
| 5 | **1** | 2 | 2 | 1 | **1** | | | | | | | 7 |
| 6 | **1** | 3 | 3 | 2 | 1 | **1** | | | | | | 11 |
| 7 | **1** | 3 | 4 | 3 | 2 | 1 | **1** | | | | | 15 |
| 8 | **1** | 4 | 5 | 5 | 3 | 2 | 1 | **1** | | | | 22 |
| 9 | **1** | 4 | 7 | 6 | 5 | 3 | 2 | 1 | **1** | | | 30 |
| 10 | **1** | 5 | 8 | 9 | 7 | 5 | 3 | 2 | 1 | **1** | | 42 |
| $\vdots$ | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | $\ddots$ | $\vdots$ |

Valorile îngroşate se completează direct, celelalte se calculează recursiv.

**Exerciţiul 1.** Folosiţi raţionamentul combinatorial ca să găsiţi formule directe de calcul pentru $p_{n,2}$, $p_{n,n-1}$ şi $p_{n,n-2}$.

RĂSPUNS: $p_{n,2}$ este numărul de partiţii $[a_1, a_2]$ cu $a_1 \geq a_2 > 0$ şi $a_1 + a_2 = n$, adică numărul de partiţii $[a_1, n - a_1]$ cu $0 < a_1 \leq n - a_1$. Rezultă că $a_1 \in \mathbb{N} \cap [1, n/2]$, deci

$$\boxed{p_{n,2} = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.}$$

$p_{n,n-1}$ este numărul de partiţii $[a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}]$ cu $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_{n-1} > 0$ şi $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} = n$.

Dacă $n = 1$ atunci $p_{n,n-1} = p_{1,0} = 0$.

Dacă $n > 1$, atunci $a_1 = 1$, pentru că dacă $a_1 \geq 2$, ar rezulta că

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} \geq 2 + 2 + \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n-3 \text{ ori}} = n + 1, \text{ contradicţie.}$$

Rezultă că $a_2 = a_3 = \ldots = a_{n-1} = 1$ şi $a_1 = n - (n-2) = 2$. Aşadar $p_{n,n-1} = 1$ fiindcă singura partiţie posibilă $[a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}]$ a lui $n > 1$ este $[2, 1, 1, \ldots, 1]$. Deci

$$\boxed{p_{n,n-1} = \begin{cases} 0 & \text{dacă } n = 1, \\ 1 & \text{dacă } n > 1. \end{cases}}$$

$p_{n,n-2}$ este numărul de partiţii $[a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}]$ cu $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_{n-2} > 0$ şi $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-2} = n$. Dacă $n \in \{1, 2\}$ atunci $n - 2 < 1$, deci $p_{n,n-2} = 1$, Dacă $n = 2$ atunci singura partiţie de forma $[a_1, a_2, a_3]$ a lui 3 este $[1, 1, 1]$, deci $p_{n,n-2} = p_{3,1} = 1$.

Dacă $n > 3$ atunci $a_3 = 1$ pentru că dacă $a_3 \geq 2$ ar rezulta că

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} \geq 2 + 2 + 2 + \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n-5 \text{ ori}} = n + 1, \text{ contradicţie.}$$

Rezultă că $a_3 = a_4 = \ldots = a_{n-2} = 1$ şi $a_1 \geq a_2$ astfel încât $a_1 + a_2 = n - (n-4) = 4$. Sunt doar 2 posibilităţi: $a_1 = 3, a_2 = 1$ şi $a_1 = a_2 = 2$, deci $p_{n,n-2} = 2$. Aşadar

$$\boxed{p_{n,n-2} = \begin{cases} 0 & \text{dacă } n < 3, \\ 1 & \text{dacă } n = 3, \\ 2 & \text{dacă } n > 3. \end{cases}}$$

### 1.7.2 Numere Stirling de cicluri

Problema a doua de numărare poate fi reformulată astfel:

- La un restaurant cu $k$ mese rotunde sunt invitate $n$ persoane numerotate de la 1 la $n$. În câte feluri pot fi puse cele $n$ persoane la mese astfel încât fiecare masă să fie ocupată de către cel puţin o persoană?

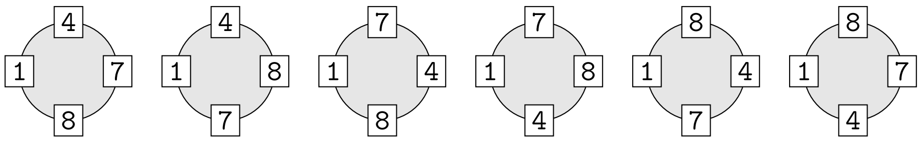
  Mesele rotunde sunt identice, iar aşezarea unui grup de persoane la o masă rotundă este un ciclu al elementelor din grup.

Acest număr se notează cu $\left[{n \atop k}\right]$ şi se numeşte **număr Stirling de cicluri**. Se observă că $\left[{n \atop k}\right]$ reprezintă şi numărul de permutări de $n$ elemente a căror structură ciclică are $k$ cicluri.

Punerea la o singură masă a unui grup $A$ de $m$ persoane este unic determinată de un ciclu $(p, p_1, p_2, \ldots, p_{m-1})$ unde

- $p$ este persoana din $A$ cu cel mai mic număr,
- $\langle p_2, p_3, \ldots, p_m \rangle$ este o permutare a persoanelor din $A - \{p\}$.

Conform regulii produsului, sunt $(m-1)!$ posibilităţi. De exemplu, persoanele `1, 4, 7, 8` pot fi puse la o masă rotundă în $3! = 6$ feluri:




`(1, 4, 7, 8)` `(1, 4, 8, 7)` `(1, 7, 4, 8)` `(1, 7, 8, 4)` `(1, 8, 4, 7)` `(1, 8, 7, 4)`

Se observă uşor că $\left[{n \atop k}\right] = 0$ dacă $k < 1$ sau $k > n$, şi că $\left[{n \atop n}\right] = 1$. Deasemenea, am văzut că $\left[{n \atop 1}\right] = (n-1)!$.

Dacă $n > k > 1$ putem face următorul raţionament combinatorial: Ca să punem persoanele $1, 2, \ldots, n$ la $k$ mese rotunde, punem mai întâi la mese persoanele $1, 2. \ldots, n-1$, iar apoi punem persoana $n$.

Deoarece trebuie ocupate toate mesele, avem 2 alternative:

1. Ocupăm $k-1$ mese cu primele $n-1$ persoane (sunt $\left[{n-1 \atop k-1}\right]$ posibilităţi), iar apoi punem persoana $n$ la masa rămasă liberă (o singură posibilitate). Conform regulii produsului, sunt $\left[{n-1 \atop k-1}\right]$ posibilităţi de a realiza această alternativă.

2. Ocupăm toate cele $k$ mese cu primele $n-1$ persoane (sunt $\left[{n-1 \atop k}\right]$ posibilităţi), iar apoi lăsăm persoana $n$ să aleagă în dreapta cărei persoane să se pună (sunt $n-1$ posibilităţi). Conform regulii produsului, sunt $(n-1) \cdot \left[{n-1 \atop k}\right]$ posibilităţi de a realiza această alternativă.

Conform regulii sumei, $\left[{n \atop k}\right] = \left[{n-1 \atop k-1}\right] + (n-1) \cdot \left[{n-1 \atop k}\right]$.

Deci formula de calcul al lui $\left[{n \atop k}\right]$ pentru $n > k > 1$ este

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1, \quad \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!, \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = 0 \text{ dacă } k < 1 \text{ sau } k > n. \\ &\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1) \cdot \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} \quad \text{dacă } n > k > 1. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Aceste relaţii de recurenţă ne permit să completăm incremental tabelul triunghiular de valori nenule pentru $\left[{n \atop k}\right]$ ilustrat mai jos:

| $\left[{n \atop k}\right]$ | $k=1$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n=1$ | **1** | | | | | | | | |
| 2 | **1** | **1** | | | | | | | |
| 3 | **2** | 3 | **1** | | | | | | |
| 4 | **6** | 11 | 6 | **1** | | | | | |
| 5 | **24** | 50 | 35 | 10 | **1** | | | | |
| 6 | **120** | 274 | 225 | 85 | 15 | **1** | | | |
| 7 | **720** | 1764 | 1624 | 735 | 175 | 21 | **1** | | |
| 8 | **5040** | 13068 | 13132 | 6769 | 1960 | 322 | 28 | **1** | |
| ⋮ | . | . | . | . | . | . | . | . | ⋱ |

Valorile îngroşate se calculează direct, iar celelalte recursiv.

**Exerciţiul 2.** Folosiţi raţionamentul combinatorial ca să găsiţi o formulă simplă de calcul pentru $\left[{n \atop n-2}\right]$.

RĂSPUNS: $\left[{n \atop n-2}\right]$ este numărul de permutări cu $n-2$ cicluri $C_1C_2\ldots C_{n-2}$. Deoarece ciclurile sunt disjuncte şi conţin $n$ elemente, avem cel mult 2 cicluri de lungime diferită de 1. Distingem 2 tipuri de astfel de permutări:

1. Cu 1 ciclu de lungime 3 şi $n-3$ cicluri de lungime 1. Dacă $n<3$, sunt 0 astfel de permutări. Dacă $n \geq 3$, sunt $n(n-1)(n-2)/3$ astfel de permutări, fiindcă sunt $C(n,3) = n(n-1)(n-2)/6$ posibilităţi să alegem elementele din ciclul de lungime 3, şi $2! = 2$ posibilităţi să formăm un ciclu cu ele. Conform regulii produsului, sunt $2 \cdot C(n,3) = n(n-1)(n-2)/3$ permutări cu această structură ciclică.

2. Cu 2 cicluri de lungime 2 şi $n-4$ cicluri de lungime 1. Dacă $n<4$ sunt 0 astfel de permutări. Dacă $n \geq 4$, putem presupune că ciclurile $C_1, C_2$ au lungimea 2, iar $C_3 \ldots C_{n-4}$ este o secvenţă de $n-6$ cicluri de lungime 1, în ordine lexicografică. Ciclul $C_1$ se poate alege în $C(n,2)$ feluri, $C_2$ în $C(n-2,2)$ feluri, iar secvenţa $C_3 \ldots C_{n-4}$ în un singur fel. Ordinea ciclurilor $C_1, C_2$ în reprezentarea ciclică este irelevantă, deci sunt $C(n,2) \cdot C(n-2,2)/2 = n(n-1)(n-2)(n-3)/8$ permutări cu această structură ciclică.

Conform regulii sumei

$$\boxed{\left[{n \atop n-2}\right] = \begin{cases} 0 & \text{dacă } n<3, \\ 2 & \text{dacă } n=3, \\ \frac{n(n-1)(n-2)}{3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8} & \text{dacă } n>3. \end{cases}}$$

**Exerciţiul 3.** Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ definim polinomul

$$G_n(x) = x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot \ldots \cdot (x+n-1)$$

1. Demonstraţi că $G_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k}\right] x^k$.
2. Demonstraţi că $n! = \sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k}\right]$.

DEMONSTRAŢIE:

1. Prin inducţie după $n$. Dacă $n = 1$ atunci $\sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k}\right] x^k = x = G_1(x)$.

   Dacă $n > 1$ atunci

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k &= \sum_{k=0}^{n} \left( \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} \right) x^k \\ &= x \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} x^k + (n-1) \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} x^k \\ &= (x+n-1) \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} x^k = (x+n-1)\, G_{n-1}(x) \\ &= \underbrace{x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot \ldots \cdot (x+n-2)}_{G_{n-1}(x)}(x+n-1).\end{aligned}$$

2. $\sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k}\right] = \sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k}\right] \cdot 1^k = G_n(1) = n!$. $\square$

### 1.7.3 Numere Stirling de mulţimi

O **partiţie** a unei mulţimi $A$ este $\{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$ astfel încât $B_i \neq \emptyset$ pentru $1 \leq i \leq k$ şi $\bigcup_{i=1}^{k} G_i = A$. **Numărul Stirling de mulţimi** $\left\{{n \atop k}\right\}$ este răspunsul la întrebarea: *Câte partiţii cu k submulţimi are o mulţime cu n elemente?* De exemplu, $\left\{{3 \atop 2}\right\} = 3$ pentru că sunt 3 partiţii cu 2 submulţimi ale mulţimii $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$:

$$\{\{\mathtt{a}\}, \{\mathtt{b}, \mathtt{c}\}\}, \quad \{\{\mathtt{b}\}, \{\mathtt{c}, \mathtt{a}\}\}, \quad \{\{\mathtt{c}\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}\}.$$

Este evident că $\left\{{n \atop k}\right\} = 0$ dacă $k < 1$ sau $k > n$, şi că $\left\{{n \atop 1}\right\} = \left\{{n \atop n}\right\} = 1$. Pentru $n > k > 1$ putem deriva o relaţie de recurenţă în felul următor. Fie $A$ mulţimea numerelor de la 1 la $n$. Partiţionarea lui $A$ în $k$ submulţimi nevide se poate face descompune în o secvenţă de 2 operaţii: (1) partiţionăm mulţimea $\{1, 2, \ldots, n-1\}$, apoi (2) adăugăm elementul $n$ astfel încât să obţinem o partiţie a lui $A$ în $k$ submulţimi nevide.

Distingem 2 cazuri:

1. Partiţionăm $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ în $k-1$ submulţimi nevide iar apoi adăugăm submulţimea $\{n\}$ la partiţia lui $\{1, 2, \ldots, n-1\}$. Conform ipotezei inductive, prima operaţie se poate realiza în $\left\{ n-1 \atop k-1 \right\}$ feluri. A doua operaţie se poate realiza în un singur fel. Conform regulii produsului, acest caz se poate realiza în $\left\{ n-1 \atop k-1 \right\}$ feluri.

2. Partiţionăm $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ în $k$ submulţimi nevide, apoi adăugăm $n$ la una din cele $k$ submulţimi nevide ale partiţiei lui $\{1, 2, \ldots, n-1\}$. Conform ipotezei inductive, prima operaţie se poate realiza în $\left\{ n-1 \atop k \right\}$ feluri. A doua operaţie se poate realiza în $k$ feluri. Conform regulii produsului, acest caz se poate realiza în $k \cdot \left\{ n-1 \atop k \right\}$ feluri.

Conform regulii sumei, $\left\{ n \atop k \right\} = \left\{ n-1 \atop k-1 \right\} + k \cdot \left\{ n-1 \atop k \right\}$ pentru $n > k > 1$.

Am dedus următoarele formule de calcul pentru numerele Stirling de mulţimi:

$$\begin{aligned}
&\left\{ n \atop k \right\} = 0 \quad \text{dacă } k < 1 \text{ sau } k > n \\
&\left\{ n \atop 1 \right\} = \left\{ n \atop n \right\} = 1 \\
&\left\{ n \atop k \right\} = \left\{ n-1 \atop k-1 \right\} + k \cdot \left\{ n-1 \atop k \right\} \quad \text{dacă } n > k > 1.
\end{aligned} \tag{1.26}$$

Aceste relaţii de recurenţă ne permit să completăm incremental tabelul triunghiular de valori nenule pentru $\left\{ n \atop k \right\}$ ilustrat mai jos:

| $\left\{ n \atop k \right\}$ | $k=1$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | $\ldots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n=1$ | **1** | | | | | | | | |
| 2 | **1** | **1** | | | | | | | |
| 3 | **1** | 3 | **1** | | | | | | |
| 4 | **1** | 7 | 6 | **1** | | | | | |
| 5 | **1** | 15 | 25 | 10 | **1** | | | | |
| 6 | **1** | 31 | 90 | 65 | 15 | **1** | | | |
| 7 | **1** | 63 | 301 | 350 | 140 | 21 | **1** | | |
| 8 | **1** | 127 | 966 | 1701 | 1050 | 266 | 28 | **1** | |
| $\vdots$ | . | . | . | . | . | . | . | . | $\ddots$ |

Valorile îngroşate se calculează direct, iar celelalte recursiv.

**Exerciţiul 4.** Câte şiruri de 20 litere se pot forma dacă se folosesc litere din mulţimea $\{\texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{c}, \texttt{d}, \texttt{e}, \texttt{f}, \texttt{g}\}$ şi fiecare literă apare cel puţin o dată?

RĂSPUNS: Fie $w$ un astfel de şir. Pentru fiecare literă $\alpha \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}, \mathtt{e}, \mathtt{f}, \mathtt{g}\}$, fie $P_\alpha$ mulţimea poziţiilor unde apare $\alpha$ în $w$. De exemplu, dacă

$$w = \mathtt{ababcdgegfggbbaddaef}$$

atunci $P_\mathtt{a} = \{1, 3, 15, 18\}$, $P_\mathtt{b} = \{2, 4, 13, 14\}$, $P_\mathtt{c} = \{5\}$, $P_\mathtt{d} = \{6, 16, 17\}$, $P_\mathtt{e} = \{8, 19\}$, $P_\mathtt{f} = \{10, 20\}$, $P_\mathtt{g} = \{7, 9, 11, 12\}$.

În general, $w$ este determinat în mod unic de un aranjament ordonat $\langle P_\mathtt{a}, P_\mathtt{b}, P_\mathtt{c}, P_\mathtt{d}, P_\mathtt{e}, P_\mathtt{f}, P_\mathtt{g}\rangle$, unde $\{P_\mathtt{a}, P_\mathtt{b}, P_\mathtt{c}, P_\mathtt{d}, P_\mathtt{e}, P_\mathtt{f}, P_\mathtt{g}\}$ este o partiţie de 7 submulţimi a mulţimii de poziţii $\{1, 2, \ldots, 20\}$.

O partiţie de 7 submulţimi a lui $\{1, \ldots, 20\}$ se poate alege în $\left\{ {20 \atop 7} \right\}$ feluri şi se poate aranja în 7! feluri. Conform regulii produsului, sunt $7! \cdot \left\{ {20 \atop 7} \right\}$ aranjamene $\langle P_\mathtt{a}, P_\mathtt{b}, P_\mathtt{c}, P_\mathtt{d}, P_\mathtt{e}, P_\mathtt{f}, P_\mathtt{g}\rangle$, deci $7! \cdot \left\{ {20 \atop 7} \right\}$ astfel de şiruri $w$. □

### 1.7.4 Concluzii

- Problemele de ocupare sunt probleme de numărare a posibilităţilor de aranjare în grupuri a elementelor unei colecţii. Aceste probleme apar în multe probleme de combinatorică şi pot să difere în următoarele aspecte:
  - ▷ dacă se face sau nu distincţie între elementele colecţiei,
  - ▷ dacă se face sau nu distincţie între grupuri identice.
- Au fost studiate trei probleme de ocupare:
  1. În câte feluri poate fi partiţionat un număr pozitiv $n$ în sumă $n = \sum_{k=1}^{m} a_k$ cu $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_k \geq 1$? Fiecare posibilitate se numeşte *partiţie* a lui $n$, iar numărul total de partiţii ale lui $n$ se notează cu $p_n$.
  2. În câte feluri pot fi puse $n$ elemente distinte în $k$ cicluri nediferenţiate? Acest număr se notează cu $\left[ {n \atop k} \right]$ şi se numeşte *număr Stirling de cicluri.*
  3. În câte feluri pot fi puse $n$ elemente distincte în $k$ mulţimi nevide disjuncte? Acest număr se notează cu $\left\{ {n \atop k} \right\}$ şi se numeşte *număr Stirling de mulţimi.*
- Cu ajutorul raţionamentului combinatorial au fost deduse următoarele formule de calcul recursiv al acestor numere, precum şi a lui $\binom{n}{k}$:

| | |
|---|---|
| $p_n$ | $\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}$ |
| $p_{n,k}$ | $p_{n,1} = p_{n,n} = 1$.<br>$p_{n,k} = 0$ dacă $k < 1$ sau $k > n$.<br>$p_{n,k} = p_{n-1,k-1} + p_{n-k,k}$ dacă $n > k > 1$. |
| $\binom{n}{k}$ | $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.<br>$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ dacă $n > k > 0$. |
| $\left[{n \atop k}\right]$ | $\left[{n \atop n}\right] = 1$, $\left[{n \atop 1}\right] = (n-1)!$.<br>$\left[{n \atop k}\right] = 0$ dacă $k < 1$ sau $k > n$.<br>$\left[{n \atop k}\right] = \left[{n-1 \atop k-1}\right] + (n-1) \cdot \left[{n-1 \atop k}\right]$ dacă $n > k > 1$. |
| $\left\{{n \atop k}\right\}$ | $\left\{{n \atop k}\right\} = 0$ dacă $k < 1$ sau $k > n$.<br>$\left\{{n \atop 1}\right\} = \left\{{n \atop n}\right\} = 1$.<br>$\left\{{n \atop k}\right\} = \left\{{n-1 \atop k-1}\right\} + k \cdot \left\{{n-1 \atop k}\right\}$ dacă $n > k > 1$. |

### 1.7.5 Exerciţii

1. Găsiţi o formulă simplă de calcul pentru $\left[{n \atop n-1}\right]$.

2. Să se determine mulţimea $\left\{\left[{9 \atop k}\right] \mid 0 \leq k \leq 9\right\}$ dacă se ştie că $\left[{8 \atop 2}\right] = 13068$, $\left[{8 \atop 3}\right] = 13132$, $\left[{8 \atop 4}\right] = 6769$, $\left[{8 \atop 5}\right] = 1960$, $\left[{8 \atop 6}\right] = 322$ şi $\left[{8 \atop 7}\right] = 28$.

3. Să se determine mulţimea $\left\{\left\{{9 \atop k}\right\} \mid 0 \leq k \leq 9\right\}$ dacă se ştie că $\left\{{8 \atop 2}\right\} = 127$, $\left\{{8 \atop 3}\right\} = 966$, $\left\{{8 \atop 4}\right\} = 1701$, $\left\{{8 \atop 5}\right\} = 1050$, $\left\{{8 \atop 6}\right\} = 266$ şi $\left\{{8 \atop 7}\right\} = 28$.

4. Găsiţi formule simple de calcul pentru $\left\{{n \atop 2}\right\}$ şi $\left\{{n \atop n-1}\right\}$.

5. Fie $A, B$ două mulţimi finite. Presupunem că $A$ are $m$ elemente şi că $B$ are $n$ elemente. Câte funcţii surjective sunt de la $A$ la $B$?

6. În câte feluri se poate forma un şir de 7 caractere, dacă se folosesc doar litere din mulţimea $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$ şi fiecare literă trebuie să apară cel puţin o dată în şir?

7. Fie $r_{n,k}$ mulţimea partiţiilor unei mulţimi de $n$ elemente în $k$ submulţimi astfel încât fiecare submulţime are cel puţin 2 elemente.

   (a) Demonstraţi combinatorial că, dacă $n > k > 1$, atunci

   $$r_{n,k} = k \cdot r_{n-1,k} + (n-1) \cdot r_{n-2,k-1}.$$

   (b) Ce valoare are $r_{5,2}$?

8. Fie $\lambda = \langle \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \rangle$ cu $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{N}$ şi $\sum_{k=1}^{n} k \cdot \lambda_k = n$. Demonstraţi că numărul de permutări din $S_n$ cu tipul $\lambda$ este

$$\frac{n!}{\lambda_1! \cdot \lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n! \cdot 1^{\lambda_1} \cdot 2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot n^{\lambda_n}}.$$