Curs 5

Teoria de enumerare a lui Pólya

Ce este teoria de enumerare a lui Pólya?

Teorie cu tehnici de rezolvare a următoarelor probleme speciale de numărare:

1. În câte feluri diferite putem colora un ansamblu de n obiecte identice cu culori din o mulțime finită de m culori?
2. În câte feluri diferite putem colora un ansamblu de n obiecte identice cu culori din o mulțime finită de m culori, dacă stim de câte ori trebuie folosită fiecare culoare?

Ce este teoria de enumerare a lui Pólya?

Teorie cu tehnici de rezolvare a următoarelor probleme speciale de numărare:

1. În câte feluri diferite putem colora un ansamblu de n obiecte identice cu culori din o mulțime finită de m culori?
2. În câte feluri diferite putem colora un ansamblu de n obiecte identice cu culori din o mulțime finită de m culori, dacă stim de câte ori trebuie folosită fiecare culoare?

EXEMPLE:

Q1: Câte coliere diferite putem forma cu 5 mărgele negre sau albe?

Q2: Câte coliere diferite putem forma cu 2 mărgele negre și 3 albe?

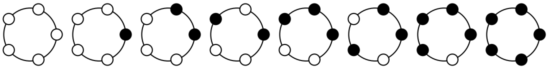
Ce este teoria de enumerare a lui Pólya?

Teorie cu tehnici de rezolvare a următoarelor probleme speciale de numărare:

1. În câte feluri diferite putem colora un ansamblu de n obiecte identice cu culori din o mulțime finită de m culori?
2. În câte feluri diferite putem colora un ansamblu de n obiecte identice cu culori din o mulțime finită de m culori, dacă stim de câte ori trebuie folosită fiecare culoare?

EXEMPLE:

Q1: Câte coliere diferite putem forma cu 5 mărgele negre sau albe?

R1: 8 coliere: 

Q2: Câte coliere diferite putem forma cu 2 mărgele negre și 3 albe?

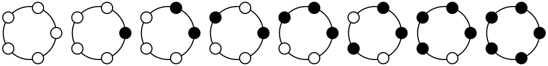
Ce este teoria de enumerare a lui Pólya?

Teorie cu tehnici de rezolvare a următoarelor probleme speciale de numărare:

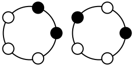
1. În câte feluri diferite putem colora un ansamblu de n obiecte identice cu culori din o mulțime finită de m culori?
2. În câte feluri diferite putem colora un ansamblu de n obiecte identice cu culori din o mulțime finită de m culori, dacă stim de câte ori trebuie folosită fiecare culoare?

EXEMPLE:

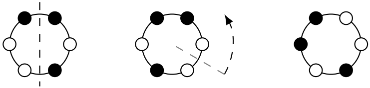
Q1: Câte coliere diferite putem forma cu 5 mărgele negre sau albe?

R1: 8 coliere: 

Q2: Câte coliere diferite putem forma cu 2 mărgele negre și 3 albe?

R2: 2 coliere: 

1. Un colier se poate răsuci în jurul unui punct sau al unei axe de simetrie $\Rightarrow$ urmatoarele colorări reprezintă același colier:

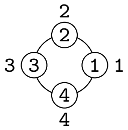


Aceste operații de răsucire se numesc simetrii ale ansamblului respectiv.

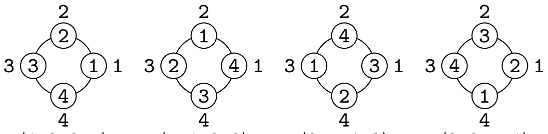
2. Simetriiile unui ansamblu de n obiecte identice pot fi descrise cu ajutorul permutărilor mulțimii $\{1, 2, \ldots, n\}$:
   - alegem o numerotare de la 1 la n a pozițiilor celor n obiecte din ansamblu, apoi numerotăm fiecare obiect cu numărul poziției unde se află.
   - simetriile unui ansamblu C de n obiecte sunt permutări ale lui $\{1, 2, \ldots, n\}$ care descriu efectul unei răsuciri a lui C:
     - $\pi = \langle p_1, p_2, \ldots, p_n \rangle$ indică faptul că obiectul 1 ocupă poziția p_1, obiectul 2 ocupă poziția p_2, etc.

Simetriile unui ansamblu de n obiecte

Exemplu: simetriile unui colier cu 4 mărgele

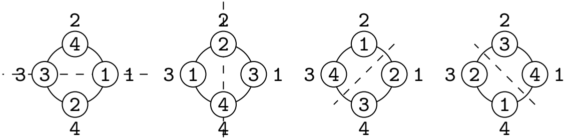
Ansamblul  are 8 simetrii:

- Rotații:



$\langle 1,2,3,4\rangle$ $\langle 4,1,2,3\rangle$ $\langle 3,4,1,2\rangle$ $\langle 2,3,4,1\rangle$

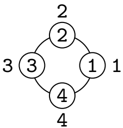
- Răsuciri în jurul unei axe de simetrie:



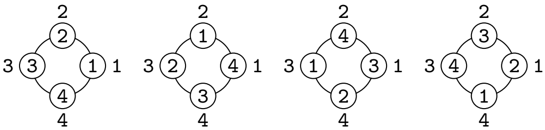
$\langle 1,4,3,2\rangle$ $\langle 3,2,1,4\rangle$ $\langle 2,1,4,3\rangle$ $\langle 4,3,2,1\rangle$

Simetriile unui ansamblu de n obiecte

Exemplu: simetriile unui colier cu 4 mărgele

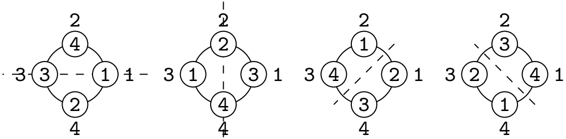
Ansamblul  are 8 simetrii:

- Rotații:



$\langle 1,2,3,4\rangle$ $\langle 4,1,2,3\rangle$ $\langle 3,4,1,2\rangle$ $\langle 2,3,4,1\rangle$

- Răsuciri în jurul unei axe de simetrie:



$\langle 1,4,3,2\rangle$ $\langle 3,2,1,4\rangle$ $\langle 2,1,4,3\rangle$ $\langle 4,3,2,1\rangle$

OBSERVAȚIE: doar 8 din cele 24 de permutări ale lui $\{1,2,3,4\}$ sunt simetrii ale acestui ansamblu de 4 mărgele.

Simetriile unui ansamblu de n obiecte identice

Fie G_C mulțimea de simetrii a unui ansamblu de n obiecte identice C.
EXEMPLU: Dacă C este colierul cu 4 mărgele atunci
$G_C = \{\langle 1,2,3,4\rangle, \langle 4,1,2,3\rangle, \langle 3,4,1,2\rangle, \langle 2,3,4,1\rangle, \langle 1,4,3,2\rangle, \langle 3,2,1,4\rangle, \langle 2,1,4,3\rangle, \langle 4,3,2,1\rangle\}$

Orice $\pi = \langle p_1, p_2, \ldots, p_n\rangle$ din G_C este și o funcție bijectivă $\pi : \{1,2,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots,n\}$ unde $\pi(1) = p_1, \pi(2) = p_2, \ldots, \pi(n) = p_n$.

Simetriile unui ansamblu de n obiecte identice

Fie G_C mulțimea de simetrii a unui ansamblu de n obiecte identice C.
EXEMPLU: Dacă C este colierul cu 4 mărgele atunci
$G_C = \{\langle 1,2,3,4\rangle, \langle 4,1,2,3\rangle, \langle 3,4,1,2\rangle, \langle 2,3,4,1\rangle, \langle 1,4,3,2\rangle, \langle 3,2,1,4\rangle, \langle 2,1,4,3\rangle, \langle 4,3,2,1\rangle\}$

Orice $\pi = \langle p_1, p_2, \ldots, p_n\rangle$ din G_C este și o funcție bijectivă $\pi : \{1,2,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots,n\}$ unde $\pi(1) = p_1, \pi(2) = p_2, \ldots, \pi(n) = p_n$.

$\Rightarrow$ simetriile pot fi compuse ($\pi_1 \circ \pi_2$) și inversate (π^{-1}) la fel ca funcțiile bijective. De exemplu, fie $\pi_1 = \langle 4,1,2,3\rangle$ și $\pi_2 = \langle 3,2,1,4\rangle$. Atunci $\pi_1, \pi_2 \in G_C$ și

- $\pi_1 \circ \pi_2 = \langle 4,1,2,3\rangle \circ \langle 3,2,1,4\rangle = \langle 2,1,4,3\rangle \in G_C$
- $\pi_1^{-1} = \langle 4,1,2,3\rangle^{-1} = \langle 2,3,4,1\rangle \in G_C$

Simetriile unui ansamblu de n obiecte identice

Fie G_C mulțimea de simetrii a unui ansamblu de n obiecte identice C.
EXEMPLU: Dacă C este colierul cu 4 mărgele atunci
$G_C = \{\langle 1,2,3,4\rangle, \langle 4,1,2,3\rangle, \langle 3,4,1,2\rangle, \langle 2,3,4,1\rangle, \langle 1,4,3,2\rangle, \langle 3,2,1,4\rangle,$
$\langle 2,1,4,3\rangle, \langle 4,3,2,1\rangle\}$

Orice $\pi = \langle p_1, p_2, \ldots, p_n\rangle$ din G_C este și o funcție bijectivă $\pi : \{1,2,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots,n\}$ unde $\pi(1) = p_1, \pi(2) = p_2, \ldots,$ $\pi(n) = p_n$.

$\Rightarrow$ simetriile pot fi compuse ($\pi_1 \circ \pi_2$) și inversate (π^{-1}) la fel ca funcțiile bijective. De exemplu, fie $\pi_1 = \langle 4,1,2,3\rangle$ și $\pi_2 = \langle 3,2,1,4\rangle$. Atunci $\pi_1, \pi_2 \in G_C$ și

- $\pi_1 \circ \pi_2 = \langle 4,1,2,3\rangle \circ \langle 3,2,1,4\rangle = \langle 2,1,4,3\rangle \in G_C$
- $\pi_1^{-1} = \langle 4,1,2,3\rangle^{-1} = \langle 2,3,4,1\rangle \in G_C$

$\Rightarrow$ G_C este un grup de permutări pentru că

1. permutarea identitate $\langle 1,2,\ldots,n\rangle$ este în G_C
2. $\pi_1 \circ \pi_2 \in G_C$ dacă $\pi_1, \pi_2 \in G_C$
3. $\pi_1^{-1} \in G_C$ dacă $\pi_1 \in G_C$

Cicluri

- Un ciclu este $c = (i_1, i_2, \ldots, i_r)$ unde $i_1, i_2, \ldots, i_r$ sunt numere distincte. Ciclul c reprezintă funcția bijectivă $c : \{i_1, i_2, \ldots, i_r\} \to \{i_1, i_2, \ldots, i_r\}$ cu
  - $c(i_1) = i_1$ dacă $r = 1$.
  - $c(i_1) = i_2, c(i_2) = i_3, \ldots$ și $c(i_r) = i_1$, dacă $r > 1$.

  EXEMPLU: $c_1 = (4, 1, 3)$ este funcția bijectivă cu $c_1(4) = 1$, $c_1(1) = 3$ și $c_1(3) = 4$. $c_2 = (2)$ este funcția bijectivă cu $c_2(2) = 2$.
- Două cicluri sunt disjuncte dacă nu au elemente comune.
- Dacă $c_1, c_2, \ldots, c_p$ sunt cicluri disjuncte două câte două atunci $c = c_1 c_2 \cdots c_p$ reprezintă funcția bijectivă cu $c(i) = c_k(i)$ unde c_k este ciclul în care apare i.

- O permutare $\pi = \langle p_1, p_2, \ldots, p_n \rangle$ este o reprezentare pozițională a unei funcții bijective:

$$\begin{array}{ccccccc} & 1 & & 2 & & & n \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow \\ \langle & p_1 & , & p_2 & , \ldots , & & p_n \rangle \end{array}$$

- Un ciclu $(i_1, \ldots, i_r)$ este o reprezentare a funcției bijective

$$(i_1 \to i_2 \to \ldots \to i_r \to i_1)$$

Exemplu

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$
$\langle 2, 4, 7, 1, 5, 3, 6 \rangle$ și $(4, 1, 2)(3, 7, 6)(5)$ reprezintă aceeași funcție.

Structura ciclică a permutărilor

Reprezentări poziționale și reprezentări ciclice

- O permutare $\pi = \langle p_1, p_2, \ldots, p_n \rangle$ este o reprezentare pozițională a unei funcții bijective:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & & & n \\ \downarrow & \downarrow & & & \downarrow \\ \langle\, p_1, & p_2, & \ldots & , & p_n \,\rangle \end{array}$$

- Un ciclu $(i_1, \ldots, i_r)$ este o reprezentare a funcției bijective

$$(\, i_1 \to i_2 \to \ldots \ldots \to i_r \,)$$

Exemplu

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$
$\langle 2, 4, 7, 1, 5, 3, 6 \rangle$ și $(4 \to 1 \to 2)(3 \to 7 \to 6)(5)$ reprezintă aceeași funcție.

$(4, 1, 2)(3, 7, 6)(5)$ se numește reprezentare ciclică a permutării $\langle 2, 4, 7, 1, 5, 3, 6 \rangle$.

Reprezentarea ciclică $c_1 c_2 \ldots c_r$ a unei permutări π se calculează astfel:

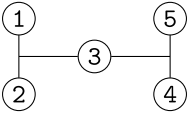
1. Se calculează $c_1 = (i_1, i_2, \ldots, i_{k_1})$ unde $i_1 = 1$ și k_1 este cel mai mic număr pentru care $\pi_{i_1} = i_2, \pi(i_2) = i_3, \ldots, \pi(i_k) = i_1$.
2. Presupunem că $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. După ce am calculat ciclurile $c_1, \ldots, c_j$ ale submulțimilor $A'_1, \ldots, A'_j$, verificăm dacă $\bigcup_{\ell=1}^{j} A'_\ell = A$. Dacă da, ne oprim. Altfel, începem să construim ciclul c_{j+1} cu elementul cel mai mic din $A - \bigcup_{\ell=1}^{j} A'_\ell$, și revenim la pasul 2.

Exemple

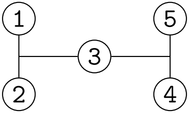
- $\langle 6, 9, 2, 1, 7, 8, 5, 4, 3 \rangle$ are structura ciclică $(1, 6, 8, 4)(2, 9, 3)(5, 7)$.
- $\langle 4, 7, 2, 3, 6, 1, 5 \rangle$ are structura ciclică $(1, 4, 3, 2, 7, 5, 6)$
- $\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6 \rangle$ are structura ciclică $(1)(2)(3)(4)(5)(6)$

Determinarea grupurilor de simetrii

Exemplul 1: grupul de simetrii al unui ansamblu planar



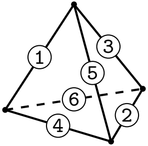
$$
\begin{aligned}
G = \{\, & (1)(2)(3)(4)(5), & \\
& (1,2)(3)(4,5), & \text{răsucire în jurul axei orizontale de simetrie} \\
& (1,5)(2,4)(3), & \text{răsucire în jurul axei verticale de simetrie} \\
& (1,4)(2,5)(3) & \text{rotație cu } 180^{\circ\prime} \\
& \}
\end{aligned}
$$



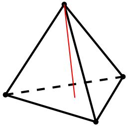
$G = \{$ (1)(2)(3)(4)(5),
(1, 2)(3)(4, 5), răsucire în jurul axei orizontale de simetrie
(1, 5)(2, 4)(3), răsucire în jurul axei verticale de simetrie
(1, 4)(2, 5)(3) rotație cu 180°′
$\}$

Tipul unei permutări π de n elemente este lista $[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$ unde λ_i este numărul de cicluri cu i elemente din reprezentarea ciclică a lui π. De exemplu:

permutarea (1)(2)(3)(4)(5) are tipul $[5, 0, 0, 0, 0]$
permutările $(1, 2)(3)(4, 5)$ și $(1, 5)(2, 4)(3)$ au tipul $[1, 2, 0, 0, 0]$
permutarea $(1, 6, 8, 4)(2, 9, 3)(5, 7)$ are tipul $[0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0]$
permutarea $(1, 4, 3, 2, 7, 5, 6)$ are tipul $[0, 0, 0, 0, 0, 0, 1]$

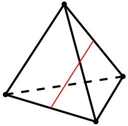


- $(1)(2)(3)(4)(5)(6)$
- Răsuciri cu 120° sau 240° în jurul unei înălțimi (sunt 4 înălțimi):



$$(1,5,3)(2,6,4),(1,3,5)(2,4,6),$$
$$(1,6,4)(2,5,3),(1,4,6)(2,3,5),$$
$$(2,4,5)(1,3,6),(2,5,4)(1,6,3),$$
$$(1,4,5)(2,3,6),(1,5,4)(2,6,3)$$

- Răsuciri cu 180° în jurul unei axe ce trece prin mijloacele unei perechi de muchii opuse (sunt 3 astfel de axe):



$$(1)(2)(3,4)(5,6),$$
$$(1,2)(3)(4)(5,6),$$
$$(1,2)(3,4)(5)(6)$$

Determinarea grupurilor de simetrii

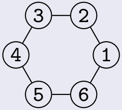
Exemplul 3: grupul de simetrii al unui colier cu $2 \cdot n$ mărgele

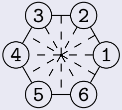
Acest grup conține

- $2 \cdot n$ rotații cu multiplu de $\frac{180^\circ}{n}$ în jurul centrului de simetrie.
- răsuciri în jurul uneia din cele $2 \cdot n$ axe de simetrie.

Acest grup de simetrii se notează cu $D_{2 \cdot n}$ și se numește grup diedral de ordinul $2 \cdot n$.

Exemplu: grupul diedral D_6, pentru $n = 3$.

1. 

Rotații în jurul centrului de simetrie:
$(1)(2)(3)(4)(5)(6), (1,2,3,4,5,6), (1,3,5)(2,4,6), (1,4)(2,5)(3,6), (1,5,3)(2,6,4), (1,6,5,4,3,2)$.
2. 

Răsuciri în jurul unei axe de simetrie:
$(1)(4)(2,6)(3,5), (1,3)(2)(4,6)(5), (1,5)(2,4)(3)(6), (1,2)(3,6)(4,5), (1,4)(2,3)(5,6), (1,6)(2,5)(3,4)$.

În general, $D_{2 \cdot n}$ are $4 \cdot n$ permutări.

Colorări

O colorare de n obiecte $\{1, 2, \ldots, n\}$ cu cel mult m culori dintr-o mulțime $K = \{k_1, \ldots, k_m\}$ este o funcție $c : \{1, 2, \ldots, n\} \to K$.

$\Rightarrow$ orice colorare este o n-permutare cu repetiție $\langle c(1), \ldots, c(n)\rangle$ de culori din K $\Rightarrow$ sunt m^n colorări posibile.

Exemplu

Colorarea $c : \{1, 2, 3, 4\}$ care mapează $1 \mapsto r, 2 \mapsto v, 3 \mapsto r, 4 \mapsto r$ este $\langle r, v, r, r\rangle$.

- Fie C mulțimea tuturor colorărilor $c : \{1, \ldots, n\} \to K$. Dacă π este o permutare și $c = \langle c(1), \ldots, c(n)\rangle$ este o colorare, definim funcția $\pi^* : C \to C$ astfel: $\pi^*(\langle c(1), \ldots, c(n)\rangle) := \langle c(\pi(1)), \ldots, c(\pi(n))\rangle$.

Exemplu

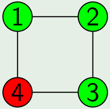
Dacă $\pi = (1, 2, 3, 4)$, atunci $\pi^*(\langle r, g, r, r\rangle) = \langle g, r, r, r\rangle$.

Dacă C este un ansamblu de n obiecte identice, π este o simetrie a lui C, și $c : \{1, \ldots, n\} \to \{k_1, \ldots, k_m\}$ este o colorare a lui C, atunci colorările c și $\pi^*(c)$ sunt echivalente.

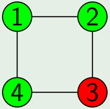
Exemplu

C = pătrat cu vârfurile colorate cu roșu (r) sau verde (v)

$$\left.\begin{array}{l} c = (v, v, v, r) \\ \pi = (1, 2, 3, 4) \end{array}\right\} \Rightarrow \pi^*(c) = (v, v, r, v)$$



este echivalentă cu



G: grup de simetrii al unui ansamblu de n obiecte
$c_1, c_2 : \{1, 2, \ldots, n\} \to K$ colorări

- c_1 și c_2 sunt echivalente în raport cu G, și scriem $c_1 \sim_G c_2$ dacă există $\pi \in G$ astfel încât $c_2 = \pi^*(c_1)$.

EXEMPLU: Grupul de simetrii al vârfurilor unui pătrat este grupul diedral

$$\begin{aligned} D_4 = \{&\pi_1 = (1)(2)(3)(4), \pi_2 = (1,2,3,4), \pi_3 = (1,3)(2,4),\\ &\pi_4 = (1,4,3,2), \pi_5 = (1,2)(3,4), \pi_6 = (1,4)(2,3),\\ &\pi_7 = (1)(3)(2,4), \pi_8 = (1,3)(2)(4)\}. \end{aligned}$$

Colorările echivalente cu colorarea $c = \langle v, v, v, r \rangle$ sunt:

$$\begin{aligned} \pi_1^*(c) = \pi_8^*(c) &= \langle v, v, v, r \rangle,\\ \pi_4^*(c) = \pi_6^*(c) &= \langle r, v, v, v \rangle,\\ \pi_3^*(c) = \pi_7^*(c) &= \langle v, r, v, v \rangle,\\ \pi_2^*(c) = \pi_5^*(c) &= \langle v, v, r, v \rangle. \end{aligned}$$

Grupuri de colorări

G: grup de simetrii ale unui ansamblu de n obiecte
C : mulțimea colorărilor $c : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{k_1, \ldots, k_m\}$
OBSERVAŢII:

1. $\sim_G$ este o relație de echivalență (reflexivă/simetrică/tranzitivă) $\Rightarrow$ C poate fi partiționată în clase de echivalență

$$\bar{c} = \{c' \in C \mid c' \sim_G c\} = \{\pi^*(c) \mid \pi \in G\}$$

Grupuri de colorări

G: grup de simetrii ale unui ansamblu de n obiecte
C : mulțimea colorărilor $c : \{1, 2, \dots, n\} \to \{k_1, \dots, k_m\}$
OBSERVAŢII:

1. $\sim_G$ este o relație de echivalență (reflexivă/simetrică/tranzitivă) $\Rightarrow$ C poate fi partiționată în clase de echivalență

$$\bar{c} = \{c' \in C \mid c' \sim_G c\} = \{\pi^*(c) \mid \pi \in G\}$$

2. $\bar{c}$ este clasa de echivalență a colorării c în raport cu relația de echivalență $\sim_G$. În literatură, $\bar{c}$ se numește orbita lui c sub acțiunea grupului G.

G: grup de simetrii ale unui ansamblu de n obiecte
C : mulțimea colorărilor $c : \{1, 2, \dots, n\} \to \{k_1, \dots, k_m\}$
OBSERVAŢII:

1. $\sim_G$ este o relație de echivalență (reflexivă/simetrică/tranzitivă) $\Rightarrow$ C poate fi partiționată în clase de echivalență

$$\bar{c} = \{c' \in C \mid c' \sim_G c\} = \{\pi^*(c) \mid \pi \in G\}$$

2. $\bar{c}$ este clasa de echivalență a colorării c în raport cu relația de echivalență $\sim_G$. În literatură, $\bar{c}$ se numește orbita lui c sub acțiunea grupului G.
3. Numărul $|\bar{c}|$ de elemente al mulțimii $\bar{c}$ reprezintă numărul de colorări echivalente cu c în raport cu G.

G: grup de simetrii ale unui ansamblu de n obiecte
C : mulțimea colorărilor $c : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{k_1, \ldots, k_m\}$
OBSERVAŢII:

1. $\sim_G$ este o relație de echivalență (reflexivă/simetrică/tranzitivă) $\Rightarrow$ C poate fi partiționată în clase de echivalență

$$\bar{c} = \{c' \in C \mid c' \sim_G c\} = \{\pi^*(c) \mid \pi \in G\}$$

2. $\bar{c}$ este clasa de echivalență a colorării c în raport cu relația de echivalență $\sim_G$. În literatură, $\bar{c}$ se numește orbita lui c sub acțiunea grupului G.
3. Numărul $|\bar{c}|$ de elemente al mulțimii $\bar{c}$ reprezintă numărul de colorări echivalente cu c în raport cu G.
4. Vrem să numărăm câte colorări neechivalente există, adică

Grupuri de colorări

G: grup de simetrii ale unui ansamblu de n obiecte
C : mulțimea colorărilor $c : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{k_1, \ldots, k_m\}$
OBSERVAŢII:

1. $\sim_G$ este o relație de echivalență (reflexivă/simetrică/tranzitivă) $\Rightarrow$ C poate fi partiționată în clase de echivalență

$$\bar{c} = \{c' \in C \mid c' \sim_G c\} = \{\pi^*(c) \mid \pi \in G\}$$

2. $\bar{c}$ este o clasa de echivalență a colorării c în raport cu relația de echivalență $\sim_G$. În literatură, $\bar{c}$ se numește orbita lui c sub acțiunea grupului G.
3. Numărul $|\bar{c}|$ de elemente al mulțimii $\bar{c}$ reprezintă numărul de colorări echivalente cu c în raport cu G.
4. Vrem să numărăm câte colorări neechivalente există, adică

   câte clase de echivalență are C?

G: grup de n-permutări
C : mulțimea tuturor colorărilor $c : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{k_1, \ldots, k_m\}$
$\pi \in G$

Mulțimea invariantă a lui π în C:

$$C_\pi := \{c \in C \mid \pi^*(c) = c\}$$

Stabilizatorul lui c în G:

$$G_c := \{\pi \in G \mid \pi^*(c) = c\}$$

G_c este întotdeauna un subgrup al lui G.

Orbita lui c sub acțiunea grupului G:

$$\bar{c} := \{\pi^*(c) \mid \pi \in G\}$$

Notație: $|A|$ este numărul de elemente din mulțimea A.

Exemplu (Colorarea cu cel mult 2 culori a unui colier cu 4 mărgele)

Grupul de simetrii este $G = \{(1)(2)(3)(4), (1,2,3,4), (1,3)(2,4), (1,4,3,2),$ $(1)(3)(2,4),\ (1,3)(2)(4),\ (1,2)(3,4), (1,4)(2,3))\}$. G are 8 permutări.
Mulțimea de 2-colorări cu roșu (r) și verde (v) este

$$\begin{aligned}C = \{\, & \langle v,v,v,v\rangle, \langle v,v,v,r\rangle, \langle v,v,r,v\rangle, \langle v,v,r,r\rangle,\\ & \langle v,r,v,v\rangle, \langle v,r,v,r\rangle, \langle v,r,r,v\rangle, \langle v,r,r,r\rangle,\\ & \langle r,v,v,v\rangle, \langle r,v,v,r\rangle, \langle r,v,r,v\rangle, \langle r,v,r,r\rangle,\\ & \langle r,r,v,v\rangle, \langle r,r,v,r\rangle, \langle r,r,r,v\rangle, \langle r,r,r,r\rangle\}.\end{aligned}$$

Observăm că

$$\begin{aligned}\overline{\langle v,v,v,r\rangle} &= \{\langle v,v,v,r\rangle, \langle v,v,r,v\rangle, \langle v,r,v,v\rangle, \langle r,v,v,v\rangle\}\\ G_{\langle v,v,v,r\rangle} &= \{(1)(2)(3)(4), (1,3)(2)(4)\}\\ \overline{\langle v,r,v,r\rangle} &= \{\langle v,r,v,r\rangle, \langle r,v,r,v\rangle\}\\ G_{\langle v,r,v,r\rangle} &= \{(1)(2)(3)(4), (1,3)(2,4), (1,3)(2)(4), (1)(2,4)(3)\}\end{aligned}$$

Observație. $|G_{\langle v,v,v,r\rangle}| \cdot |\overline{\langle v,v,v,r\rangle}| = 2 \cdot 4 = 8 = |G|$ și
$|G_{\langle g,r,g,r\rangle}| \cdot |\overline{\langle g,r,g,r\rangle}| = 4 \cdot 2 = 8 = |G|$.

Reamintim că
$$\begin{aligned} \pi^*(c) &= \langle c(\pi(1)), \ldots, c(\pi(n))\rangle, \\ \overline{c} &= \{\pi^*(c) \mid \pi \in G\}, \\ G_c &= \{\pi \in G \mid \pi^*(c) = c\}. \end{aligned}$$

Lemă

Fie G un grup care acționează pe o mulțime de colorări C. Pentru orice colorare $c \in C$ are loc egalitatea $|G_c| \cdot |\overline{c}| = |G|$.

DEMONSTRAȚIE: Vezi materialul extins de curs.

Fie A un ansamblu de m obiecte și G grupul de simetrii al lui A.

Î1: Care este numărul de m-colorări neechivalente ale lui A?

Numărare în prezența simetriilor

Fie A un ansamblu de m obiecte și G grupul de simetrii al lui A.

Î1: Care este numărul de m-colorări neechivalente ale lui A?

R1: Acesta este numărul claselor de echivalență al mulțimii C de m-colorări în prezența simetriilor din G, și se poate calcula cu formula din Lema lui Burnside:

$$N = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} |C_\pi|.$$

Fie A un ansamblu de m obiecte și G grupul de simetrii al lui A.

Î1: Care este numărul de m-colorări neechivalente ale lui A?

R1: Acesta este numărul claselor de echivalență al mulțimii C de m-colorări în prezența simetriilor din G, și se poate calcula cu formula din Lema lui Burnside:

$$N = \frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G}|C_\pi|.$$

Î2: Cum putem calcula $|C_\pi|$?

Fie A un ansamblu de m obiecte și G grupul de simetrii al lui A.

Î1: Care este numărul de m-colorări neechivalente ale lui A?

R1: Acesta este numărul claselor de echivalență al mulțimii C de m-colorări în prezența simetriilor din G, și se poate calcula cu formula din Lema lui Burnside:

$$N = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} |C_\pi|.$$

Î2: Cum putem calcula $|C_\pi|$?

R2: Dacă $\pi = c_1 c_2 \ldots c_p$ atunci

- toate obiectele din un ciclu c_i trebuie să aibe aceeași culoare din K $\Rightarrow$ pentru fiecare ciclu c_i putem alege una din m culori

$\Rightarrow$ conform regulii produsului: $|C_\pi| = \underbrace{m \cdot m \cdot \ldots \cdot m}_{p \text{ ori}} = m^p$.

- Demonstrația lemei lui Burnside este în materialul de curs extins.
- De exemplu, dacă $\pi_1 = (1)(2)(3)(4)$, $\pi_2 = (1,2,3,4)$, $\pi_3 = (1,3)(2,4)$ și C este o mulțime de m-colorări atunci
  - $|C_{\pi_1}| = m^4$,
  - $|C_{\pi_2}| = m$,
  - $|C_{\pi_3}| = m^2$.

Exemplu

Î: Câte coliere diferite cu 4 mărgele putem forma cu mărgele de m culori posibile?

R: Am văzut deja că grupul de simetrii al unui colier cu 4 mărgele este $G = \{(1)(2)(3)(4), (1,2,3,4), (1,3)(2,4), (1,4,3,2), (1)(3)(2,4), (1,3)(2)(4), (1,2)(3,4), (1,4)(2,3))\}$.
Avem de calculat câte m-colorări neechivalente sunt în prezența grupului de simetrii G.
Conform lemei lui Burnside, acest număr este

$$\frac{1}{|G|} \cdot \sum_{\pi \in G} |C_\pi| = \frac{1}{8}(m^4 + m + m^2 + m + m^3 + m^3 + m^2 + m^2)$$
$$= \frac{1}{8}(m^4 + 2\,m^3 + 3\,m^2 + 2\,m).$$

Cu $m = 2$ culori putem forma $\frac{1}{8}(2^4 + 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2) = 6$ coliere diferite.

Indexul ciclic al unui grup

PRESUPUNEM CĂ G este un grup de permutări și $\pi \in G$

- Pentru o permutare π cu tipul $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$ definim

$$M_\pi = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\lambda_i}$$

  unde $x_1, \ldots, x_n$ sunt necunoscute.

- Indexul ciclic al lui G este

$$P_G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} M_\pi.$$

Dacă G este grupul de simetrii al colierului cu 4 mărgele, atunci

$$\begin{gathered}
M_{(1)(2)(3)(4)} = x_1^4, \\
M_{(1,3)(2)(4)} = M_{(1)(2,4)(3)} = x_1^2 x_2, \\
M_{(1,2)(3,4)} = M_{(1,3)(2,4)} = M_{(1,4)(2,3)} = x_2^2, \\
M_{(1,2,3,4)} = M_{(1,4,3,2)} = x_4.
\end{gathered}$$

Deci

$$P_G(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{8}(x_1^4 + 2\,x_1^2 x_2 + 3\,x_2^2 + 2\,x_4).$$

Conform lemei lui Burnside, numărul de colorări de n objecte cu m culori posibile, luând în considerare simetriile grupului G, este $N = P_G(m, m, \ldots, m)$.

Exemplu

Numărul de coliere cu 4 mărgele ce pot avea oricare din m culori este

$$N = P_G(m, m, m, m) = \frac{1}{8}(m^4 + 2\,m^3 + 3\,m^2 + 2\,m).$$

deoarece știm deja că

$$P_G(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{8}(x_1^4 + 2\,x_1^2 x_2 + 3\,x_2^2 + 2\,x_4)$$

Î: Câte coliere cu 20 mărgele se pot alcătui folosind mărgele de 3 culori?

R: Calculăm indexul ciclic al grupului de simetrii D_{20}. D_{20} conține 20 rotații:

- Rotația cu 0° are tipul $[20, 0, 0, \ldots, 0] \Rightarrow$ monomul x_1^{20}
- 8 rotații cu $k \cdot 18^\circ$ unde $k \in \{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$ au tipul $[0, \ldots, 0, 1] \Rightarrow$ monomul $8\,x_{20}$
- 4 rotații cu $k \cdot 18^\circ$ unde $k \in \{2, 6, 14, 18\}$ au tipul $[\lambda_1, \ldots, \lambda_{20}]$ cu $\lambda_{10} = 2$ și $\lambda_j = 0$ pentru toți $j \neq 10 \Rightarrow$ monomul $4\,x_{10}^2$
- 4 rotații cu $k \cdot 18^\circ$ unde $k \in \{4, 8, 12, 16\}$ au tipul $[\lambda_1, \ldots, \lambda_{20}]$ cu $\lambda_5 = 4$ și $\lambda_j = 0$ pentru toți $j \neq 5 \Rightarrow$ monomul $4\,x_5^4$
- 2 rotații cu $k \cdot 18^\circ$ unde $k \in \{5, 15\}$ au tipul $[\lambda_1, \ldots, \lambda_{20}]$ cu $\lambda_4 = 5$ și $\lambda_j = 0$ pentru toți $j \neq 4 \Rightarrow$ monomul $2\,x_4^5$
- Rotația cu $10 \cdot 18^\circ$ are tipul $[0, 2, 0, \ldots] \Rightarrow$ monomul x_2^{10}

și 20 răsuciri în jurul unei axe de simetrie:

- 10 răsuciri în jurul axelor ce trec prin mijloace de laturi opuse ale polig. regulat au tipul $[0, 10, 0, \ldots, 0] \Rightarrow$ monomul $10\,x_2^{10}$
- 10 răsuciri în jurul axelor de trec prin vârfuri opuse ale polig. regulat au tipul $[\lambda_1, \ldots, \lambda_{20}]$ cu $\lambda_1 = 2$ și $\lambda_9 = 1 \Rightarrow$ monomul $10\,x_1^2\,x_2^9$

Î: Câte coliere cu 20 mărgele se pot alcătui folosind mărgele de 3 culori?

R: Calculăm indexul ciclic al grupului de simetrii D_{20}. D_{20} conține 20 rotații:

- Rotația cu 0° are tipul $[20, 0, 0, \ldots, 0] \Rightarrow$ monomul x_1^{20}
- 8 rotații cu $k \cdot 18^\circ$ unde $k \in \{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$ au tipul $[0, \ldots, 0, 1] \Rightarrow$ monomul $8\, x_{20}$
- 4 rotații cu $k \cdot 18^\circ$ unde $k \in \{2, 6, 14, 18\}$ au tipul $[\lambda_1, \ldots, \lambda_{20}]$ cu $\lambda_{10} = 2$ și $\lambda_j = 0$ pentru toți $j \neq 10 \Rightarrow$ monomul $4\, x_{10}^2$
- 4 rotații cu $k \cdot 18^\circ$ unde $k \in \{4, 8, 12, 16\}$ au tipul $[\lambda_1, \ldots, \lambda_{20}]$ cu $\lambda_5 = 4$ și $\lambda_j = 0$ pentru toți $j \neq 5 \Rightarrow$ monomul $4\, x_5^4$
- 2 rotații cu $k \cdot 18^\circ$ unde $k \in \{5, 15\}$ au tipul $[\lambda_1, \ldots, \lambda_{20}]$ cu $\lambda_4 = 5$ și $\lambda_j = 0$ pentru toți $j \neq 4 \Rightarrow$ monomul $2\, x_4^5$
- Rotația cu $10 \cdot 18^\circ$ are tipul $[0, 2, 0, \ldots] \Rightarrow$ monomul x_2^{10}

și 20 răsuciri în jurul unei axe de simetrie:

- 10 răsuciri în jurul axelor ce trec prin mijloace de laturi opuse ale polig. regulat au tipul $[0, 10, 0, \ldots, 0] \Rightarrow$ monomul $10\, x_2^{10}$
- 10 răsuciri în jurul axelor de trec prin vârfuri opuse ale polig. regulat au tipul $[\lambda_1, \ldots, \lambda_{20}]$ cu $\lambda_1 = 2$ și $\lambda_9 = 1 \Rightarrow$ monomul $10\, x_1^2\, x_2^9$

Î: Câte coliere cu 20 mărgele se pot alcătui folosind mărgele de 3 culori?

R: Calculăm indexul ciclic al grupului de simetrii D_{20}. D_{20} conține 20 rotații:

- Rotația cu 0° are tipul $[20, 0, 0, \ldots, 0] \Rightarrow$ monomul x_1^{20}
- 8 rotații cu $k \cdot 18^\circ$ unde $k \in \{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$ au tipul $[0, \ldots, 0, 1] \Rightarrow$ monomul $8\, x_{20}$
- 4 rotații cu $k \cdot 18^\circ$ unde $k \in \{2, 6, 14, 18\}$ au tipul $[\lambda_1, \ldots, \lambda_{20}]$ cu $\lambda_{10} = 2$ și $\lambda_j = 0$ pentru toți $j \neq 10 \Rightarrow$ monomul $4\, x_{10}^2$
- 4 rotații cu $k \cdot 18^\circ$ unde $k \in \{4, 8, 12, 16\}$ au tipul $[\lambda_1, \ldots, \lambda_{20}]$ cu $\lambda_5 = 4$ și $\lambda_j = 0$ pentru toți $j \neq 5 \Rightarrow$ monomul $4\, x_5^4$
- 2 rotații cu $k \cdot 18^\circ$ unde $k \in \{5, 15\}$ au tipul $[\lambda_1, \ldots, \lambda_{20}]$ cu $\lambda_4 = 5$ și $\lambda_j = 0$ pentru toți $j \neq 4 \Rightarrow$ monomul $2\, x_4^5$
- Rotația cu $10 \cdot 18^\circ$ are tipul $[0, 2, 0, \ldots] \Rightarrow$ monomul x_2^{10}

și 20 răsuciri în jurul unei axe de simetrie:

- 10 răsuciri în jurul axelor ce trec prin mijloace de laturi opuse ale polig. regulat au tipul $[0, 10, 0, \ldots, 0] \Rightarrow$ monomul $10\, x_2^{10}$
- 10 răsuciri în jurul axelor de trec prin vârfuri opuse ale polig. regulat au tipul $[\lambda_1, \ldots, \lambda_{20}]$ cu $\lambda_1 = 2$ și $\lambda_9 = 1 \Rightarrow$ monomul $10\, x_1^2\, x_2^9$

$\triangleright$ $P_{D_{20}} = \frac{1}{40}(x_1^{20} + 10\, x_1^2\, x_2^9 + 11\, x_2^{10} + 2\, x_4^5 + 4\, x_5^4 + 4\, x_{10}^2 + 8\, x_{20})$
$\Rightarrow N = P_{20}(3, \ldots, 3) = 87\,230\,157$

Cu indexul ciclic putem rezolva probleme mai complicate de numărat colorări de ansambluri în prezența simetriilor. De exemplu:

- Cum putem afla câte m-colorări are un ansamblu de n obiecte cu m culori $y_1, \ldots, y_m$ în care fiecare culoare apare de un număr predefinit de ori?

Definiție (Inventar de modele)

Inventarul de modele al colorărilor unui ansamblu de n obiecte cu m culori $y_1, y_2, \ldots, y_m$ este polinomul

$$F_G(y_1, y_2, \ldots, y_m) = \sum_{\substack{(n_1,n_2,\ldots,n_m)\in\mathbb{N}^m \\ n_1+n_2+\ldots+n_m=n}} a_{(n_1,n_2,\ldots,n_m)} y_1^{n_1} y_2^{n_2} \ldots y_m^{n_m} \quad \text{în care}$$

- G este grupul de simetrii al ansamblului,
- $a_{(n_1,n_2,\ldots,n_m)}$ este numărul de colorări ne-echivalente ale celor n obiecte, în care fiecare culoare y_i apare de exact n_i ori.

Exemplu

Câte coliere diferite se pot alcătui cu 2 mărgele roșii (r), 9 negre (n) și 9 albe (a)? Presupunem că simetriile acestui colier sunt permutările grupului diedral D_{20}, format din

- 20 rotații în jurul centrului de simetrie
- 20 răsuciri în jurul unei axe de simetrie

Exemplu

Câte coliere diferite se pot alcătui cu 2 mărgele roșii (r), 9 negre (n) și 9 albe (a)? Presupunem că simetriile acestui colier sunt permutările grupului diedral D_{20}, format din

- 20 rotații în jurul centrului de simetrie
- 20 răsuciri în jurul unei axe de simetrie

Răspuns Acesta este coeficientul lui $r^2 n^9 a^9$ în inventarul de modele, care este polinomul

$$F_{D_{20}}(r,n,a) = \sum_{\substack{(i,j,k)\in\mathbb{N}^3\\ i+j+k=20}} a_{(i,j,k)} r^i n^j a^k.$$

Exemplu

Câte coliere diferite se pot alcătui cu 2 mărgele roșii (r), 9 negre (n) și 9 albe (a)? Presupunem că simetriile acestui colier sunt permutările grupului diedral D_{20}, format din

- 20 rotații în jurul centrului de simetrie
- 20 răsuciri în jurul unei axe de simetrie

Răspuns Acesta este coeficientul lui $r^2 n^9 a^9$ în inventarul de modele, care este polinomul

$$F_{D_{20}}(r, n, a) = \sum_{\substack{(i,j,k)\in\mathbb{N}^3 \\ i+j+k=20}} a_{(i,j,k)} r^i n^j a^k.$$

În 1937, G. Pólya a descoperit o formulă simplă de calcul a inventarului de modele, cu ajutorul indexului ciclic al grupului. (vezi slide-ul următor)

Presupunem că S este un ansamblu de n obiecte colorabile cu m culori $y_1, \ldots, y_m$, și că G este grupul de simetrii al lui S. Fie

$$P_G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} M_\pi$$

indexul ciclic al grupului G. Atunci inventarul de modele al colorărilor ansamblului S cu culorile $y_1, \ldots, y_m$ în prezența simetriilor din G este

$$F_G(y_1, y_2, \ldots, y_m) = P_G\left(\sum_{i=1}^{m} y_i, \sum_{i=1}^{m} y_i^2, \ldots, \sum_{i=1}^{m} y_i^n\right).$$

Știm că indexul ciclic al lui D_{20} este

$$P_{D_{20}} = \frac{1}{40}(x_1^{20} + 10\,x_1^2\,x_2^9 + 11\,x_2^{10} + 2\,x_4^5 + 4\,x_5^4 + 4\,x_{10}^2 + 8\,x_{20})$$

Inventarul de modele al unui colier cu 20 mărgele ce pot fi roșii (r), negre (n) sau albe (a) este

$$\begin{aligned}F_{D_{20}}(r,n,a) = \frac{1}{40}(&(r+n+a)^{20} + 10\,(r+n+a)^2(r^2+n^2+a^2)^9 + \\ &+ 11\,(r^2+n^2+a^2)^{10} + 2\,(r^4+n^4+a^4)^5 + \\ &+ 2\,(r^4+n^4+a^4)^5 + 4\,(r^5+n^5+a^5)^4 + 4\,(r^{10}+n^{10}+a^{10})^2 \\ &+ 8\,(r^{20}+n^{20}+a^{20}))\end{aligned}$$

Avem de calculat coeficientul lui $r^2 n^9 a^9$ în inventarul de modele.

Î: Ce coeficient are $r^2 n^9 a^9$ în $F_{D_{20}}(r, n, a)$?

- coeficientul lui $r^2 n^9 a^9$ în $(r + n + a)^{20}$ este $\binom{20}{2,9,9}$
- coeficientul lui $r^2 n^9 a^9$ în $10\,(r + n + a)^2(r^2 + n^2 + a^2)^9$ este $10 \cdot A \cdot B$ unde
  - $A = \binom{2}{1,1,0} = 2$ este coef. lui $r\,n$ în $(r + n + a)^2$
  - $B = \binom{9}{1,4,4} = 630$ este coef. lui $r^2 n^8 a^8 = (r^2)^1(n^2)^4(a^2)^4$ în $(r^2 + n^2 + a^2)^9$
- $r^2 n^9 a^9$ nu apare în $(r^2 + n^2 + a^2)^{10}$, $(r^4 + n^4 + a^4)^5$, $(r^{10} + n^{10} + a^{10})^2$, $r^{20} + n^{20} + a^{20}$.

R: $\frac{1}{40} \cdot \left(\binom{20}{2,9,9} + 10 \cdot 2 \cdot 630\right) = 230945 + 315 = 231260.$