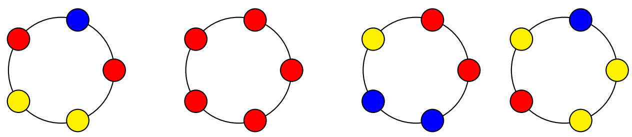
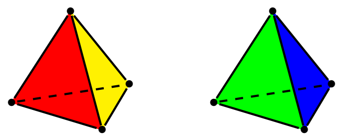
1.6 Teoria de enumerare a lui Pólya

Această teorie ne oferă metode de numărare a tuturor colorărilor posibile ale ansamblurilor de obiecte când se folosesc culori din o mulţime prestabilită. Exemple de astfel de ansambluri colorate sunt:

1. Coliere de 5 mărgele roşii, galbene sau albastre plasate echidistant pe un cerc. Obiectele ansamblului sunt cele 5 mărgelele. De exemplu:

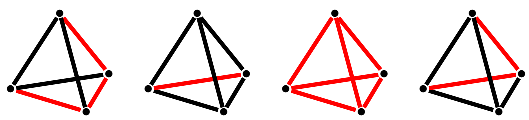


2. Un tetraedru regulat cu feţele colorate cu 4 culori: roşu, galben, albastru sau verde. Obiectele acestui ansamblu sunt cele 4 feţe ale tetraedrului. De exemplu:

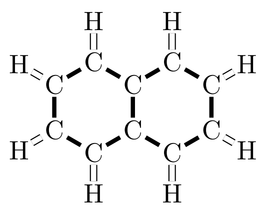


feţele invizibile sunt verzi   feţele invizibile sunt galbene

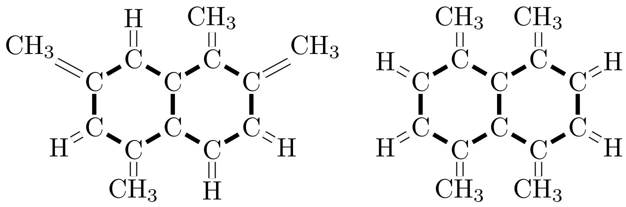
3. Un tetraedru regulat cu muchiile colorate cu 2 culori: roşu sau negru. Obiectele acestui ansamblu sunt cele 4 muchii ale tetraedrului. De exemplu:



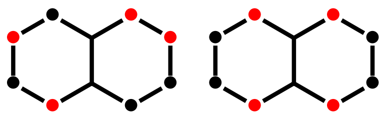
4. Molecula de naftalină $C_{10}H_8$ este un ansamblu rigid de 10 atomi de carbon, dintre care 8 sunt legaţi la atomi de hidrogen ca în figura de mai jos:



Izomerii de tetrametilnaftalină au formula chimică $C_6H_4(CH_3)_4$ şi se obţin înlocuind în molecula de naftalină 4 atomi de hidrogen cu grupuri de metil (CH_3). De exemplu:

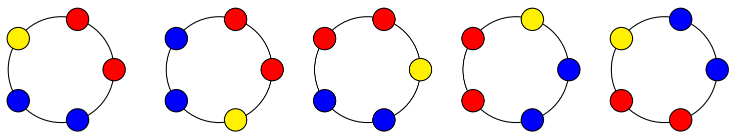


O problamă a chimiştilor este să afle câţi izomeri are o moleculă. Fiecare izomer al tetrametilnaftalinei este un ansamblu atomic în care obiectele relevante sunt cei 8 atomi de carbon legaţi legaţi fie la H, fie la CH_3. Dacă colorăm atomii de C legaţi la H cu negru şi atomii de C legaţi la CH_3 cu roşu, atunci izomerii de $C_6H_4(CH_3)_4$ ilustraţi mai sus sunt ansamblurile colorate



iar problema chimiştilor se reduce la numărarea colorărilor acestui ansamblu de 8 obiecte cu roşu de 4 ori şi negru de 4 ori.

Numărarea ansamblurilor colorate trebuie să ţină cont de faptul că ansamblurile se pot răsuci. De pildă, configuraţiile



reprezintă acelaşi colier rigid[3] de 5 mărgele colorate fiindcă fiecare configuraţie se obţine din oricare alta fie printr-o rotaţie în jurul centrului de simetrie, sau printr-o răsucire în jurul unei axe de simetrie.

Operaţiile care permută locurile ocupate de obiectele unui ansamblu în spaţiu se numesc *simetrii* ale ansamblului respectiv.

Orice ansamblu C are o mulţime de simetrii pe care o vom nota cu G_C. Numărarea colorărilor ansamblului C trebuie să ţină cont de mulţimea de simetrii G_C.

[3]Un ansamblu este rigid dacă obiectele componente îşi menţin poziţiile relative faţă de celelalte obiecte.

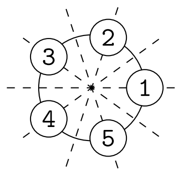
1.6.1 Ansambluri şi grupuri de simetrii

Orice permutarec $\pi = \langle p_1, p_2, \ldots, p_n\rangle$ a mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$ poate fi interpretată şi ca o funcţie bijectivă $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ cu $\pi(i) = p_i$ pentru $1 \leq i \leq n$. Vom folosi această interpetare a permutărilor pentru a descrie configuraţii de ansambluri şi simetriile acestora.

Vom considera ansambluri de n obiecte numerotate de la 1 la n, care ocupă n poziţii în plan sau spaţiu, numerotate de la 1 la n. O *configuraţie* a ansamblului este o permutare π a mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$ care indică poziţia $\pi(i)$ a fiecărui obiect i al ansamblului. Iniţial presupunem că fiecare obiect $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ este la poziţia i, deci configuraţia iniţială este permutarea $\langle 1, 2, \ldots, n\rangle$.

O *simetrie* a unui ansamblu de n obiecte este o permutare π care indică faptul că putem efectua o răsucire care să mute fiecare obiect de la poziţia i la poziţia p_i.

Exemplul 1. Un colier C cu configuraţia



este un ansamblu cu 10 simetrii: 5 rotaţii cu multiplu 72° în jurul centrului de simetrie şi 5 răsuciri în jurul uneia din cale 5 axe de simetrie ilustrate cu linie întreruptă. Mulţimea de simetrii este

$$G_C = \{\langle 1,2,3,4,5\rangle, \langle 2,3,4,5,1\rangle, \langle 3,4,5,1,2\rangle, \langle 4,5,1,2,3\rangle, \langle 5,1,2,3,4\rangle,$$
$$\langle 1,5,4,3,2\rangle, \langle 3,2,1,5,4\rangle, \langle 5,4,3,2,1\rangle, \langle 2,1,5,4,3\rangle, \langle 4,3,2,1,5\rangle\}$$

Observăm că

1. Permutările mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$ formează un grup, pe care-l notăm S_n şi îl numim **grupul simeric** de n elemente.

2. Pentru orice ansamblu C cu n elemente, G_C este o mulţime de funcţii bijective care formează un subgrup al lui S_n. Acest lucru înseamnă că

   - $\langle 1, 2, \ldots, n\rangle \in G_C$ şi
   - dacă $\pi_1, \pi_2 \in G_C$ atunci $\pi_1^{-1} \in G_C$ şi $\pi_1 \circ \pi_2 \in G_C$.

   De exemplu, dacă pentru colierul C din Exemplul 1 alegem simetriile $\pi_1 = \langle 2, 3, 4, 5, 1\rangle$ şi $\pi_2 = \langle 2, 1, 5, 4, 3\rangle$ atunci $\pi_1^{-1} = \langle 5, 1, 2, 3, 4\rangle \in G_C$ şi $\pi_1 \circ \pi_2 = \langle 3, 2, 1, 5, 4\rangle \in G_C$.

Din acest motiv, G_C se numeşte **grupul de simetrii** al ansamblului C.

1.6.2 Cicluri. Reprezentarea ciclică a permutărilor

Un **ciclu** de lungime $k > 0$ este o funcţie bijectivă $c : A \to A$ cu $|A| = k$, $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ astfel încât, dacă $k > 1$ atunci $c(a_k) = a_1$ şi $c(a_i) = a_{i+1}$ pentru $1 \leq i < k$. Scriem $c = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ pentru a indica acest lucru, şi $|c| = k$ pentru a indica faptul că c are lungimea k.

Două cicluri c_1, c_2 sunt *disjuncte* dacă nu au elemente în comun. Dacă $c_i : A_1 \to A_i$ sunt cicluri disjuncte două câte două atunci combinaţia de cicluri $c_1 c_2 \ldots c_p$ reprezintă funcţia bijectivă $f : A \to A$ unde $A = \bigcup_{i=1}^{p} A_i$ şi $f(a) = c_i(a)$ dacă $a \in A_i$. O combinaţie de cicluri disjuncte $c_1 c_2 \ldots c_p$ se numeşte **reprezentare ciclică** a unei permutări π, şi scriem $\pi = c_1 c_2 \ldots c_p$, dacă π şi $c_1 c_2 \ldots c_p$ reprezintă aceeaşi funcţie bijectivă.

Tipul unei reprezentări ciclice a unei permutări $\pi \in S_n$ este lista de numere $[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$ unde λ_i este numărul de cicluri de lungime i din reprezentarea respectivă.

Exemplul 2. $(1, 6, 3)(2, 4, 5)(7)$ şi permutarea $\pi = \langle 6, 4, 1, 5, 2, 3, 7\rangle$ reprezintă aceeaşi funcţie bijectivă $f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ cu $f(1), f(2) = 3, f(3) = 1, f(4) = 5, f(5) = 2, f(6) = 3, f(7) = 7$. Deci $\pi = (1, 6, 3)(2, 4, 5)(7)$, iar reprezentarea ciclică $(1, 6, 3)(2, 4, 5)(7)$ are tipul $[1, 0, 2, 0, 0, 0, 0]$. □

Calculul unei reprezentări ciclice a unei permutări

O reprezentare ciclică a lui $\pi \in S_n$ se poate calcula în felul următor:

1. c_1 este ciclul $(i_1, i_2, \ldots, i_{k_1})$ unde $i_1 = 1$ şi k_1 este cel mai mic număr pentru care $\pi(i_1) = i_2$, $\pi(i_2) = i_3$, $\ldots$, $\pi(i_{k_1}) = i_1$.

2. Presupunem că $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. După ce am calculat ciclurile $c_1, \ldots, c_j$ ale submulţimilor $A'_1, \ldots, A'_j$, verificăm dacă $\bigcup_{\ell=1}^{j} A'_\ell = A$. Dacă da, ne oprim. Altfel, începem să construim ciclul c_{j+1} cu elementul cel mai mic din $A - \bigcup_{\ell=1}^{j} A'_\ell$, şi revenim la pasul 2.

Reprezentarea ciclică calculată cu acest algormtim se nuneşte **reprezentarea ciclică canonică** a lui π.

Exemplul 3. Fie $\pi = \langle 4, 9, 3, 5, 1, 10, 2, 6, 7, 8\rangle$. O reprezentare ciclică a lui π se calculează astfel:

- Deoarece $1 \mapsto 4 \mapsto 5 \mapsto 1$, primul ciclu este $(1, 4, 5)$.

- Al doilea ciclu începe cu cel mai mic număr din $\{1, 2, \ldots, 10\} - \{1, 4, 5\}$, adică cu 2. Deoarece $2 \mapsto 9 \mapsto 7 \mapsto 2$, al doilea ciclu este $(2, 9, 7)$.
- Al treilea ciclu începe cu cel mai mic număr din $\{1, 2, 3, \ldots, 10\} - \{1,2,4,5,7,9\}$, adică cu 3. Deoarece $3 \mapsto 3$, al treilea ciclu este (3).
- Al patrulea ciclu începe cu cel mai mic număr din $\{1, 2, \ldots, 10\} - \{1,2,3,4,5,7,9\}$, adică cu 8. Deoarece $8 \mapsto 6 \mapsto 10 \mapsto 8$, al patrulea ciclu este $(8, 6, 10)$.
- Ne oprim fiindcă cele 4 cicluri conţin toate elementele de la 1 la 10.

Reprezentarea ciclică calculată este $\pi = (1, 4, 5)(2, 9, 7)(3)(8, 6, 10)$. □

Proprietăţi ale reprezentărilor ciclice. Tipul unei permutări

Un ciclu c poate fi reprezentat în $|c|$ feluri pentru că, dacă $c = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$, atunci

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k) = (a_2, a_3, \ldots, a_k, a_1 \ldots = (a_k, a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}).$$

Deasemenea, dacă $c_1, \ldots, c_p$ sunt p cicluri disjuncte şi $\pi' \in S_p$ atunci

$$c_1 c_2 \ldots c_p = c_{\pi'(1)} c_{\pi'(2)} \ldots c_{\pi'(p)}.$$

Fie $c_1 c_2 \ldots c_p = \pi \in S_n$ şi $[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$ tipul lui $c_1 c_2 \ldots c_p$. Conform regulii produsului, numărul de reprezentări ciclice ale lui π este

$$|S_p| \cdot |c_1| \cdot \ldots \cdot |c_p| = p! \cdot 1^{\lambda_1} \cdot 2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot n^{\lambda_n}$$

deoarece S_p are $p!$ permutări şi mulţimea $\{c_1, c_2, \ldots, c_p\}$ are λ_1 cicluri de lungime 1, λ_2 cicluri de lungime 2, ..., şi λ_n cicluri de lungime n. Mai mult, toate reprezentările ciclice ale lui π au tipul $[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$. Din acest motiv, lista $[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$ se numeşte **tipul permutării** π.

Exemplul 4. Am văzut în Exemplul 2 că reprezentarea ciclică canonică a lui $\pi = \langle 4, 9, 3, 5, 1, 10, 2, 6, 7, 8\rangle$ este $(1, 4, 5)(2, 9, 7)(3)(6, 8, 10)$. Deci π are tipul $[1, 0, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$ şi $4! \cdot 3^3 = 648$ reprezentări ciclice. □

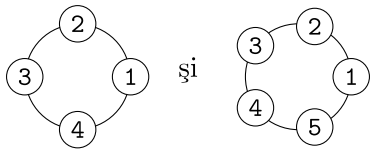
Reprezentările ciclice ale permutărilor sunt utile în studiul grupurilor de simetrii ale ansamblurilor de obiecte, din două motive:

1. sunt uşor de folosit pentru a descrie simetriile rigide ale ansamblurilor de obiecte.
2. ne permit să calculăm rapid tipul simetriilor. Vom vedea că, atunci când vrem să calculăm numărul de colorări diferite ale unui ansamblu C, este util să ştim tipul permutărilor din grupul de simetrii G_C.

1.6.3 Grupurile C_n şi D_n

Grupul ciclic C_n

C_n caracterizează un ansamblu rigid de $n \geq 1$ obiecte plasate în vârfurile unui poligon regulat cu n vârfuri. Singurele simetrii sunt rotaţiile în jurul centrului de simetrie cu un unghi multiplu de $360°/n$. De pildă, o roată de ruletă cu 36 de sloturi este un ansamblu caracterizat de grupul ciclic C_{36}. Ansambluri caracterizate de grupurile ciclice C_4 şi C_5 pot avea configuraţiile



Se observă că

$$C_4 = \{(1)(2)(3)(4), (1,2,3,4), (1,3)(2,4), (1,4,3,2)\} \text{ şi}$$
$$C_5 = \{(1)(2)(3)(4)(5), (1,2,3,4,5), (1,3,5,2,4), (1,4,2,5,3), (1,5,4,3,2)\}.$$

În general, $C_n = \{\pi^k \mid 0 \leq k < n\}$ unde $\pi = (1,2,\ldots,n)$, $\pi^0 = (1)(2)\ldots(n)$, $\pi^1 = \pi$ şi $\pi^k = \pi \circ \pi^{k-1}$ dacă $k > 1$. Deasemenea, tipul fiecărei permutări $\pi^k \in C_n$ este $[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$ unde $\lambda_i = \gcd(k,n)$ dacă $i = n/\gcd(n,k)$ şi $\lambda_i = 0$ dacă $i \neq n/\gcd(n,k)$.

Exemplul 5. C_8 are 8 permutări. Divizorii lui 8 sunt $1, 2, 4$ şi 8. Rezultă că, dacă $\pi = (1,2,3,4,5,6,7,8)$, atunci

- $\gcd(k,8) = 1$ pentru $k \in \{1,3,5,7\}$, deci C_8 are 4 permutări cu tipul $[0,0,0,0,0,0,0,1]$, şi anume pe

$$\pi = (1,2,3,4,5,6,7,8), \qquad \pi^3 = (1,4,7,2,5,8,3,6),$$
$$\pi^5 = (1,6,3,8,5,2,7,4), \qquad \pi^7 = (1,8,7,6,5,4,3,2).$$

- $\gcd(k,8) = 2$ pentru $k \in \{2,6\}$, deci C_8 are 2 permutări cu tipul $[0,0,0,2,0,0,0,0]$, şi anume pe

$$\pi^2 = (1,3,5,7)(2,4,6,8), \qquad \pi^6 = (1,7,5,3)(2,8,6,4).$$

- $\gcd(k,8) = 4$ doar pentru $k = 4$, deci C_8 are 1 permutare cu tipul $[0,4,0,0,0,0,0,0]$, şi anume pe $\pi^4 = (1,5)(2,6)(3,7)(4,8)$.

- $\gcd(k,8) = 8$ doar pentru $k = 0$, deci C_8 are 1 permutare cu tipul $[8,0,0,0,0,0,0,0,0]$, şi anume pe $\pi^8 = (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)$.

Grupul diedral D_n

D_n caracterizează un ansamblu rigid de $n \geq 1$ obiecte plasate în vârfurile unui poligon regulat cu n vârfuri. Simetriile sunt rotaţiile în jurul centrului de simetrie cu un unghi multiplu de $360°/n$, precum şi rotaţiile în jurul axelor de simetrie. De pildă, simetriile unui colier cu 5 mărgele sunt permutările grupului diedral D_5. Am văzut în Exemplul 1 de la pag. 71 că

$$D_5 = C_5 \cup \{(1)(2,5)(3,4),(1,3)(2)(4,5),(1,5)(2,4)(3),\\ (1,2)(3,5)(4),(1,4)(2,3)(5)\}.$$

C_n este un subgrup al lui D_n iar permutările din $D_n - C_n$ sunt răsuciri în jurul axelor de simetrie. În general, grupul diedral D_n are $2 \cdot n$ permutări iar tipurile permutărilor din $D_n - C_n$ depind de paritatea lui n:

- Dacă n este impar, adică de forma $2 \cdot k + 1$, atunci orice permutare din $D_n - C_n$ are tipul $[1, k, 0, 0, \ldots, 0]$.
- Dacă n este par, adică de forma $2 \cdot k$, atunci $D_n - C_n$ are
  - ▶ k permutări cu tipul $[2, k-1, 0, \ldots, 0]$. Acestea sunt permutările pentru răsuciri în jurul axelor care trec prin 2 vârfuri diametral opuse ale poligonului regulat.
  - ▶ k permutări cu tipul $[0, k, 0, \ldots, 0]$. Acestea sunt permutările pentru răsuciri în jurul axelor care trec prin mijloacele a două laturi diametral opuse ale poligonului regulat.

Exemplul 6. Grupul diedral D_{20} este grupul de simetrii al unui colier cu 20 mărgele. D_{20} are 40 simetrii:

- 20 de rotaţii. Acestea sunt permutările grupului ciclic C_{20}. Divizorii lui 20 sunt 1, 2, 4, 5, 10 şi 20, deci C_{20} conţine
  - ▶ 8 permutări cu tipul $[0, 0, \ldots, 0, 1]$ fiindcă $\{k \mid \gcd(k, 20) = 1\} = \{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$ are 8 elemente,
  - ▶ 4 permutări cu tipul $[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, \ldots, 0]$ fiindcă $\{k \mid \gcd(k, 20) = 2\} = \{2, 6, 14, 18\}$ are 4 elemente,
  - ▶ 4 permutări cu tipul $[0, 0, 0, 0, 4, \ldots, 0]$ fiindcă $\{k \mid \gcd(k, 20) = 4\} = \{4, 8, 12, 16\}$ are 4 elemente,
  - ▶ 2 permutări cu tipul $[0, 0, 0, 5, 0, \ldots, 0]$ fiindcă $\{k \mid \gcd(k, 20) = 5\} = \{5, 15\}$ are 2 elemente,

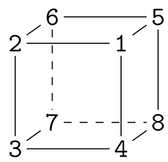
  - ▶ 1 permutare cu tipul $[0, 10, 0, \ldots, 0]$ fiindcă $\gcd(k, 20) = 10$ doar pentru $k = 10$,
  - ▶ 1 permutare cu tipul $[20, 0, 0, \ldots, 0]$ fiindcă $\gcd(k, 20) = 20$ doar pentru $k = 0$.

- 20 de răsuciri în jurul unei axe de simetrie, dintre care:
  - ▶ 10 au tipul $[2, 9, 0, \ldots, 0]$,
  - ▶ 10 au tipul $[0, 10, 0, \ldots, 0]$.

1.6.4 Simetrii ale unor ansambluri tridimensionale

Ansamblul vârfurilor unui cub

Cubul C_1 ilustrat cu colţurile numerotate de la 1 la 8:



are un grup de 24 simetrii: $(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)$ şi

- Răsuciri cu multiplu $90°$ în jurul axelor ce trec prin mijloacele a două feţe opuse:

$$(1,2,3,4)(5,6,7,8), (1,3)(2,4)(5,7)(6,8), (1,4,3,2)(5,8,7,6),$$
$$(1,5,6,2)(3,4,8,7), (1,6)(2,5)(3,8)(4,7), (1,2,6,5)(3,7,8,4),$$
$$(1,4,8,5)(2,3,7,6), (1,8)(4,5)(2,7)(3,6), (1,5,8,4)(2,6,7,3).$$

- Răsuciri cu multiplu de $120°$ în jurul axelor ce trec prin două vârfuri diametral opuse:

$$(1)(7)(2,4,5)(3,8,6), (1)(7)(2,5,4)(3,6,8),$$
$$(2)(8)(1,3,6)(4,7,5), (2)(8)(1,6,3)(4,5,7),$$
$$(3)(5)(1,8,6)(2,4,7), (3)(5)(1,6,8)(2,7,4),$$
$$(4)(6)(1,8,3)(2,5,7), (4)(6)(1,3,8)(2,7,5).$$

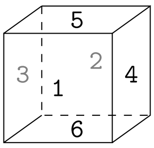
- Răsuciri cu $180°$ în jurul axelor ce trec prin mijloacele a două muchii diametral opuse:

$$(1,5)(2,8)(3,7)(4,6), (1,7)(2,8)(3,4)(5,6),$$

$$(1,7)(2,6)(3,5)(4,8),(1,2)(3,5)(4,6)(7,8),$$
$$(1,4)(2,8)(3,5)(6,7),(1,7)(2,3)(4,6)(5,8).$$

Ansamblul feţelor unui cub

Cubul C_2 ilustrat cu feţele numerotate de la 1 la 6:



are un grup de 24 simetrii: (1)(2)(3)(4)(5)(6) şi

- Răsuciri cu multiplu 90° în jurul axelor ce trec prin mijloacele a două feţe opuse:

$$(1)(2)(3,6,4,5),(1)(2)(3,4)(5,6),(1)(2)(3,5,4,6),$$
$$(3)(4)(1,6,2,5),(3)(4)(1,2)(5,6),(3)(4)(1,5,2,6),$$
$$(5)(6)(1,3,2,4),(5)(6)(1,2)(3,4),(5)(6)(1,4,2,3).$$

- Răsuciri cu multiplu de 120° în jurul axelor ce trec prin două vârfuri diametral opuse pe sfera care circumscrie cubul:

$$(1,4,5)(3,6,2),(1,5,4)(2,6,3), \quad (1,6,3)(2,4,5),(1,3,6)(2,5,4),$$
$$(1,6,4)(2,5,3),(1,4,6)(2,3,5), \quad (1,5,3)(2,6,4),(1,3,5)(2,4,6).$$

- Răsuciri cu 180° în jurul axelor ce trec prin mijloacele a două muchii diametral opuse în cub:

$$(1,5)(2,6)(3,4),(1,2)(3,6)(4,5),$$
$$(1,6)(2,5)(3,4),(1,2)(3,5)(4,6),$$
$$(1,3)(2,4)(5,6),(1,4)(2,3)(5,6).$$

1.6.5 Colorări

Fie K o mulţime finită de m culori, $C = K^{\{1,2,\ldots,m\}}$, A un ansamblu cu n componente numerotate de la 1 la n, şi G grupul de simetrii al lui A. O m-**colorare** (sau **colorare** cu cel mult m culori) a lui A este o funcţie $c \in C$. Vom reprezenta fiecare colorare c cu n-permutarea cu repetiţie $\langle c_1, c_2, \ldots, c_n\rangle$ unde $c_i = c(i)$ pentru toţi $i \in \{1,2,\ldots,n\}$.

De exemplu, sunt $2^4 = 16$ colorări ale vârfurilor unui pătrat cu roşu ($\mathtt{r}$) şi negru ($\mathtt{n}$):

$\langle\mathtt{r},\mathtt{r},\mathtt{r},\mathtt{r}\rangle$, $\langle\mathtt{r},\mathtt{r},\mathtt{r},\mathtt{n}\rangle$, $\langle\mathtt{r},\mathtt{r},\mathtt{n},\mathtt{r}\rangle$, $\langle\mathtt{r},\mathtt{n},\mathtt{r},\mathtt{r}\rangle$, $\langle\mathtt{n},\mathtt{r},\mathtt{r},\mathtt{r}\rangle$, $\langle\mathtt{r},\mathtt{r},\mathtt{n},\mathtt{n}\rangle$, $\langle\mathtt{r},\mathtt{n},\mathtt{r},\mathtt{n}\rangle$, $\langle\mathtt{r},\mathtt{n},\mathtt{n},\mathtt{r}\rangle$, $\langle\mathtt{n},\mathtt{r},\mathtt{r},\mathtt{n}\rangle$, $\langle\mathtt{n},\mathtt{r},\mathtt{n},\mathtt{r}\rangle$, $\langle\mathtt{n},\mathtt{n},\mathtt{r},\mathtt{r}\rangle$, $\langle\mathtt{r},\mathtt{n},\mathtt{n},\mathtt{n}\rangle$, $\langle\mathtt{n},\mathtt{r},\mathtt{n},\mathtt{n}\rangle$, $\langle\mathtt{n},\mathtt{n},\mathtt{r},\mathtt{n}\rangle$, $\langle\mathtt{n},\mathtt{n},\mathtt{n},\mathtt{r}\rangle\langle\mathtt{n},\mathtt{n},\mathtt{n},\mathtt{n}\rangle$.

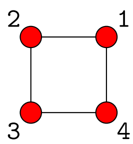
Dacă $\pi \in G$ şi $c \in C$, atunci $\pi^*(c)$ este colorarea $c' = c \circ \pi$. Altfel spus, $c' = \langle c'_1, c'_2, \ldots, c'_n\rangle$ cu $c'_i = c(\pi(i))$ pentru toţi $1 \leq i \leq n$.

Două colorări c_1, c_2 ale lui A sunt **echivalente**, şi scriem $c_1 \sim c_2$, dacă $c_1 = \pi^*(c_2)$ pentru o permutare $\pi \in G$. $\sim$ este o relaţie de echivalenţă care partiţionează mulţimea de colorări C în clase de echivalenţă. Reamintim faptul că clasa de echivalenţă a unei colorări c este mulţimea de colorări

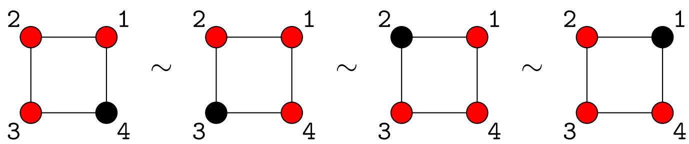
$$[c]_\sim = \{\pi^*(c) \mid \pi \in G\}.$$

Exemplul 7. Fie $C = \{\mathtt{r}, \mathtt{g}\}^{\{1,2,3,4\}}$ mulţimea colorărilor vârfurilor unui pătrat. Grupul de simetrii este $G = D_4$, iar clasele de echivalenţă sunt:

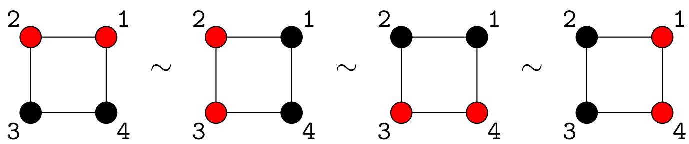
1. $[\langle\mathtt{r},\mathtt{r},\mathtt{r},\mathtt{r}\rangle]_\sim = \{\langle\mathtt{r},\mathtt{r},\mathtt{r},\mathtt{r}\rangle\}$.



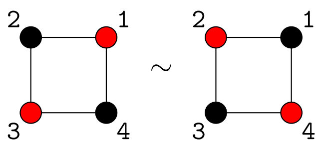
2. $[\langle\mathtt{r},\mathtt{r},\mathtt{r},\mathtt{n}\rangle]_\sim = \{\langle\mathtt{r},\mathtt{r},\mathtt{r},\mathtt{n}\rangle, \langle\mathtt{r},\mathtt{r},\mathtt{n},\mathtt{r}\rangle, \langle\mathtt{r},\mathtt{n},\mathtt{r},\mathtt{r}\rangle, \langle\mathtt{n},\mathtt{r},\mathtt{r},\mathtt{r}\rangle\}$.



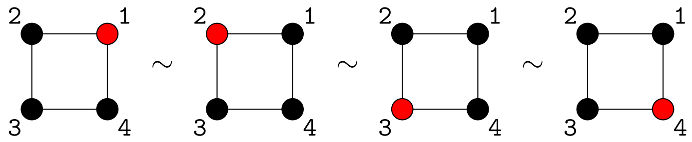
3. $[\langle\mathtt{r},\mathtt{r},\mathtt{n},\mathtt{n}\rangle]_\sim = \{\langle\mathtt{r},\mathtt{r},\mathtt{n},\mathtt{n}\rangle, \langle\mathtt{n},\mathtt{r},\mathtt{r},\mathtt{n}\rangle, \langle\mathtt{n},\mathtt{n},\mathtt{r},\mathtt{r}\rangle, \langle\mathtt{r},\mathtt{n},\mathtt{n},\mathtt{r}\rangle\}$.



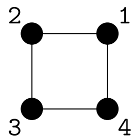
4. $[\langle\mathtt{r},\mathtt{n},\mathtt{r},\mathtt{n}\rangle]_\sim = \{\langle\mathtt{r},\mathtt{n},\mathtt{r},\mathtt{n}\rangle, \langle\mathtt{n},\mathtt{r},\mathtt{n},\mathtt{r}\rangle\}$.



5. $[\langle \mathtt{r}, \mathtt{n}, \mathtt{n}, \mathtt{n} \rangle]_\sim = \{\langle \mathtt{r}, \mathtt{n}, \mathtt{n}, \mathtt{n} \rangle, \langle \mathtt{n}, \mathtt{r}, \mathtt{n}, \mathtt{n} \rangle, \langle \mathtt{n}, \mathtt{n}, \mathtt{r}, \mathtt{n} \rangle, \langle \mathtt{n}, \mathtt{n}, \mathtt{n}, \mathtt{r} \rangle\}$.



6. $[\langle \mathtt{n}, \mathtt{n}, \mathtt{n}, \mathtt{n} \rangle]_\sim = \{\langle \mathtt{n}, \mathtt{n}, \mathtt{n}, \mathtt{n} \rangle\}$.



Toate colorările din o clasă de echivalenţă reprezintă o singură colorare a ansamblului. Deci numărul de colorări diferite al ansamblului A este numărul claselor de echivalenţă ale lui $\sim$. În particular, sunt 6 colorări diferite ale vârfurilor unui pătrat cu roşu şi negru. □

În continuare vom prezenta nişte noţiuni auxiliare şi lemma lui Burnside, care ne permite calculul direct al numărului de clase de echivalenţă ale lui $C/\sim$, şi deci al numărului de colorări diferite a unui ansamblu cu m culori.

▶ **Mulţimea invariantă** a unei simetrii $\pi \in G$ în C este

$$C_\pi = \{c \in C \mid \pi^*(c) = c\}.$$

▶ **Stabilizatorul** unei colorări c în G este mulţimea

$$G_c = \{\pi \in G \mid \pi^*(c) = c\}.$$

▶ **Orbita** unei colorări c sub acţiunea simetriilor din G este mulţimea

$$\overline{c} = \{\pi^*(c) \mid \pi \in G\}.$$

Exemplul 8. Pentru ansamblul şi mulţimea de colorări C din exerciţiul precedent avem:

$$\begin{aligned} C_{(1,3,4)(2)} &= \{\langle \mathtt{n}, \mathtt{n}, \mathtt{n}, \mathtt{n} \rangle, \langle \mathtt{n}, \mathtt{r}, \mathtt{n}, \mathtt{n} \rangle, \langle \mathtt{r}, \mathtt{n}, \mathtt{r}, \mathtt{r} \rangle, \langle \mathtt{r}, \mathtt{r}, \mathtt{r}, \mathtt{r} \rangle\}, \\ G_{\langle \mathtt{n}, \mathtt{r}, \mathtt{n}, \mathtt{n} \rangle} &= \{(1)(2)(3)(4), (1,3,4)(2)\}, \\ \overline{\langle \mathtt{n}, \mathtt{r}, \mathtt{n}, \mathtt{n} \rangle} &= \{\langle \mathtt{n}, \mathtt{r}, \mathtt{n}, \mathtt{n} \rangle, \langle \mathtt{n}, \mathtt{n}, \mathtt{r}, \mathtt{n} \rangle, \langle \mathtt{n}, \mathtt{n}, \mathtt{n}, \mathtt{r} \rangle, \langle \mathtt{r}, \mathtt{n}, \mathtt{n}, \mathtt{n} \rangle\}. \end{aligned}$$

□

Lemă. Fie G grupul de simetrii al unui ansamblu de n obiecte cu colorări din C. Atunci $|G_c| \cdot |\bar{c}| = |G|$.

DEMONSTRAŢIE: Fie $\bar{c} = \{c_1, \ldots, c_m\}$. Deoarece $\bar{c} = \{\pi^*(c) \mid \pi \in G\}$, există m permutări distincte $\pi_1, \ldots, \pi_m \in G$ astfel încât $\pi_i^*(c) = c_i$. Fie $P = \{\pi_1, \ldots, \pi_m\}$ şi

$$f : P \times G_c \to G, \quad f(\pi_i, \pi) := \pi_i \circ \pi.$$

Pentru a demonstra că $|G_c| \cdot |\bar{c}| = |G|$ este suficient să demonstrăm că f este bijectivă fiindcă, în acest caz, avem $|G| = |P \times G_c| = |P| \cdot |G_c| = m \cdot |G_c| = |G_c| \cdot m = |G_c| \cdot |\bar{c}|$.

f este bijectivă dacă şi numai dacă pentru fiecare $\sigma \in G$ există o singură pereche de permutări $\langle \pi_i, \pi \rangle \in P \times G_c$ astfel încât $f(\pi_i, \pi) = \sigma$. Dacă $\sigma \in G$ atunci $\sigma^*(c) = c_i = \pi_i^*(c)$ pentru un $1 \leq i \leq m$, şi $\pi_i^{-1} \circ \sigma \in G_c$ fiindcă

$$(\pi_i^{-1} \circ \sigma)^*(c) = (\pi_i^{-1})^*(\sigma^*(c)) = (\pi_i^{-1})^*(\pi_i^*(c)) = c.$$

Deoarece $\langle \pi_i, \pi_i^{-1} \circ \sigma \rangle \in P \times G_c$ şi $f(\pi_i, \pi_i^{-1} \circ \sigma) = \pi_i \circ (\pi_i^{-1} \circ \sigma) = (\pi_1 \circ \pi_i^{-1}) \circ \sigma = \sigma$, rezultă că f este surjectivă.

Pentru a demonstra că f este injectivă, fie $\langle \pi_i, \pi \rangle, \langle \pi_j, \pi' \rangle \in P \times G_c$ astfel încât $f(\pi_i, \pi) = f(\pi_j, \pi')$, adică există $\sigma \in G$ astfel încât $\pi_i \circ \pi = \sigma = \pi_j \circ \pi'$. În particular $(\pi_i \circ \pi)^*(c) = (\pi_j \circ \pi')^*(c)$. Dar $(\pi_i \circ \pi)^*(c) = \pi_i^*(\pi^*(c)) = \pi^*(c) = c_i$ şi $(\pi_j \circ \pi')^*(c) = \pi_j^*(\pi'^*(c)) = \pi_j^*(c) = c_j$, deci $c_i = c_j$, ceea ce implică $i = j$, $\pi_i = \pi_j$ şi $\pi = \pi_i^{-1} \circ \sigma = \pi_j^{-1} \circ \sigma = \pi'$. Aşadar $\langle \pi_i, \pi \rangle = \langle \pi_j, \pi' \rangle$, deci f este injectivă. □

Lema lui Burnside

Fie N numărul de clase de echivalenţă ale lui $\sim$. Atunci

$$N = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} |C_\pi|.$$

DEMONSTRAŢIE.

$$\begin{aligned}\frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} |C_\pi| &= \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} \sum_{c \in C} [\pi^*(c) = c] = \frac{1}{|G|} \sum_{c \in C} \sum_{\pi \in G} [\pi^*(c) = c] \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{c \in C} |G_c| = \sum_{c \in C} \frac{1}{\bar{c}} = \sum_{\bar{c}} \sum_{c \in \bar{c}} \frac{1}{\bar{c}} = \sum_{\bar{c}} 1 = N.\end{aligned}$$

□

Pentru a putea aplica lema lui Burnside, ne mai trebuie formule de calcul pentru $|C_\pi|$, numărul de colorări din mulţimea $C_\pi = \{c \mid \pi^*(c) = c\}$.

Observăm că dacă $c \in C_\pi$ atunci toate obiectele permutate de către un ciclu al lui π trebuie să aibă aceeaşi culoare. De exemplu, dacă $\pi = (1,3,5)(2,7)(6)$ atunci obiectele $1,3,5$ trebuie să aibe aceeaşi culoare; 2 şi 7 trebuie să aibe aceeaşi coloare; iar obiectul 6 poate avea orice culoare. Rezultă, conform regulii produsului, că $|C_\pi| = m^k$ unde k este numărul de cicluri din π.

Exemplul 9. Câte coliere diferite se pot forma folosind cinci mărgele de cel mult trei culori?
RĂSPUNS: Numărul de culori disponibile este 3 şi grupul de simetrii este

$$\begin{aligned} D_5 = \{&(1)(2)(3)(4)(5), (1,2,3,4,5), (1,3,5,2,4), (1,4,2,5,3), (1,5,4,3,2),\\ &(1)(2,5)(3,4), (2)(1,3)(4,5), (3)(2,4)(1,5), (4)(1,2)(3,5),\\ &(5)(1,4)(2,3)\}. \end{aligned}$$

Rezultă că

$$|C_\pi| = \begin{cases} 3^5 & \text{dacă } \pi = (1)(2)(3)(4)(5),\\ 3 & \text{dacă } \pi \in C_5 - \{(1)(2)(3)(4)(5)\},\\ 3^3 & \text{dacă } \pi \in D_5 - C_5. \end{cases}$$

Conform lemei lui Burnside, numărul de coliere care se pot forma este

$$N = \frac{1}{|D_5|} \sum_{\pi \in D_5} |C_\pi| = \frac{1}{10} \cdot \left(3^5 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 3^2\right) = \frac{300}{10} = 30.$$

□

Exemplul 10. În câte feluri putem colora feţele unui cub dacă avem la dispoziţie 3 culori?

RĂSPUNS: Am văzut la pagina 77 că grupul de simetrii al acestei configuraţii are 24 de permutări, dintre care: 1 permutare cu 6 cicluri, 3 permutări cu 4 cicluri, 12 permutări cu 3 cicluri, şi permutări cu 2 cicluri. Rezultă că numărul căutat este

$$N = \frac{1}{24} \cdot \left(3^6 + 3 \cdot 3^4 + 12 \cdot 3^3 + 8 \cdot 3^2\right) = 57395628.$$ □

1.6.6 Colorări cu număr prestabilit pentru fiecare culoare

Lema lui Burnside ne dă o formulă de calcul al numărului total de m-colorări al unui ansamblu C caracterizat de un grup de simetrii G_C. În această secţiune analizăm o problemă de numărare mai dificilă: Câte colorări are ansamblu cu culori din o mulţime de m culori $y_1, y_2, \ldots, y_m$, astfel încât fiecare culoare i_i să fie folosită de un număr prestabilit de ori, n_i?

O formulă simplă de calcul al acestui număr a fost descoperită în 1937 de George Pólya. Pentru a înţelege această formulă de calcul, vom introduce 2 noţiuni auxiliare: indexul de cicluri şi inventarul de modele.

Indexul de cicluri al grupului de simetrii G al unui ansamblu cu n componente este polinomul

$$P_G(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} M_\pi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

unde $M_\pi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este monomul $x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_n^{\lambda_n}$ iar $[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$ este tipul permutării π. Altfel spus, $P_G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ conţine termenul $\frac{a}{|G|} \cdot x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_n{}^{\lambda_n}$ dacă şi numai dacă G are a permutări cu tipul $[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$.

Exemplul 11. Indexul de cicluri al lui D_4 este

$$\begin{aligned} P_{D_4}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \frac{1}{8} \sum_{\pi \in D_4} M_\pi(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ &= \frac{1}{8} (x_1^4 + 2\, x_1^2\, x_2 + 3\, x_2^2 + 2\, x_4). \end{aligned}$$

□

Ne punem problema rezolvării următoarei probleme de numărare:

> În câte feluri putem colora un ansamblu cu n componente dacă folosim m culori $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ şi impunem condiţia ca fiecare culoare y_i sa fie folosită de exact n_i ori? Observaţi că trebuie să aibă loc egalitatea $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$.

Pentru a rezolva aceaată problemă, definim polinomul

$$F_G(y_1, y_2, \ldots, y_m) = P_G(\sum_{i=1}^m y_i, \sum_{i=1}^m y_i^2, \ldots, \sum_{i=1}^n y_i^n). \tag{1.23}$$

Polinomul F_G se numeşte **inventarul de modele** cu culorile $y_1, y_2, \ldots, y_m$ al ansamblului caracterizat de grupul de simetrii G.

Formula (1.23) indică faptul că inventarul de modele F_G pentru o mulţime de m culori se obţine din indexul ciclic F_G făcând următoarele înlocuiri:

x_1 cu $y_1 + y_2 + \ldots + y_m$,
x_2 cu $y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_m^2$,
$\ldots$
x_n cu $y_1^n + y_2^n + \ldots + y_m^n$.

Formula de enumerare a lui Pólya

Pólya a demonstrat în [10] că pentru orice tuplu $(n_1, n_2, \ldots, n_m) \in \mathbb{N}$ care satisface condiţia $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$, avem că

> coeficientul lui $y_1^{n_1} y_2^{n_2} \ldots y_m^{n_m}$ coincide cu numărul de colorări ale ansamblului care satisfac condiţia problemei noastre.

Din acest motiv, polinomul $F_G(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ se numeşte *inventar* de modele al ansamblului.

$F_G(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ este de obicei un polinom mare care poate avea sute sau (zeci de) mii de termeni, iar pentru calculul lui se recomandă folosirea unui sistem de calcul simbolic precum Mathematica.

Exemplul 12. Să se calculeze inventarul de modele al unui colier cu 4 mărgele de 3 culori. Câte coliere se pot forma cu 2 mărgele roşii, una galbenă şi una albastră?

RĂSPUNS: Am văzut în Exemplul 7 de la pagina 82 că grupul de simetrii al acestui colier este D_4, şi că indexul de cicluri al lui D_4 este

$$P_{D_4}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{8}\,(x_1^4 + 2\,x_1^2\,x_2 + 3\,x_2^2 + 2\,x_4).$$

Ca să aflăm inventarul de modele al acestui colier pentru colorări cu roşu (r), galben (g) şi albastru (a), calculăm $P_{D_4}(r+g+a, r^2+g^2+a^2, r^3+g^3+a^3, r^4+g^4+a^4)$, adică

$$\begin{aligned}&\frac{1}{8}\big((r+g+a)^4 + 2\,(r+g+a)^2(r^2+g^2+a^3) + 3\,(r^2+g^2+a^2)^2\\&\quad + 2\,(r^4+g^4+a^4)\big) = r^4+g^4+a^4+r^3g+r\,g^3+r^3a+r\,a^3+g^3a+g\,a^3\\&\quad + 2\,r^2g^2 + 2\,r^2\,a^2 + 2\,g^2a^2 + 2\,r^2g\,a + 2\,g^2\,r\,a + 2\,a^2\,r\,g.\end{aligned}$$

Coeficientul lui $r^2g\,a$ este 2, deci sunt 2 coliere cu 2 mărgele roşii, una galbenă şi una albastră. □

Exemplul 13. În câte feluri putem colora feţele unui cub cu culori din mulţimea $\{r, g, b\}$ folosind culoarea r de 3 ori, g de 2 ori şi b o singură dată?

RĂSPUNS: Am văzut la pagina 77 că feţele unui cub sunt un ansamblu şi ca grupul lui de simetrii are: o simetrie de tip $[6,0,0,0,0,0]$, 6 simetrii de tip $[2,0,0,1,0,0]$, 3 simetrii de tip $[2,2,0,0,0,0]$, 8 simetrii de tip $[0,0,2,0,0,0]$ şi 6 simetrii de tip $[0,3,0,0,0,0]$. Deci indexul de cicluri este

$$\frac{1}{24}\cdot\left(x_1^6+6\,x_1^2x_4+3\,x_1^2\,x_2^2+8\,x_3^2+6\,x_2^3\right).$$

Inventarul de modele pentru culorile r, g, b se obţine înlocuind x_i cu $r^i+g^i+b^i$ în indexul de cicluri, adică

$$\begin{aligned}F(r,g,v)=\frac{1}{24}\Big(&(r+g+b)^6+6\,(r+g+b)^2\left(r^4+g^4+b^4\right)+\\&3\,(r+g+b)^2\left(r^2+g^2+b^2\right)^2+\\&8\left(r^3+g^3+b^3\right)^2+6\left(r^2+g^2+b^2\right)^3\Big).\end{aligned}$$

Calculul inventarului de modele produce un polinom cu 28 termeni şi se poate efectua în Mathematica [14]:

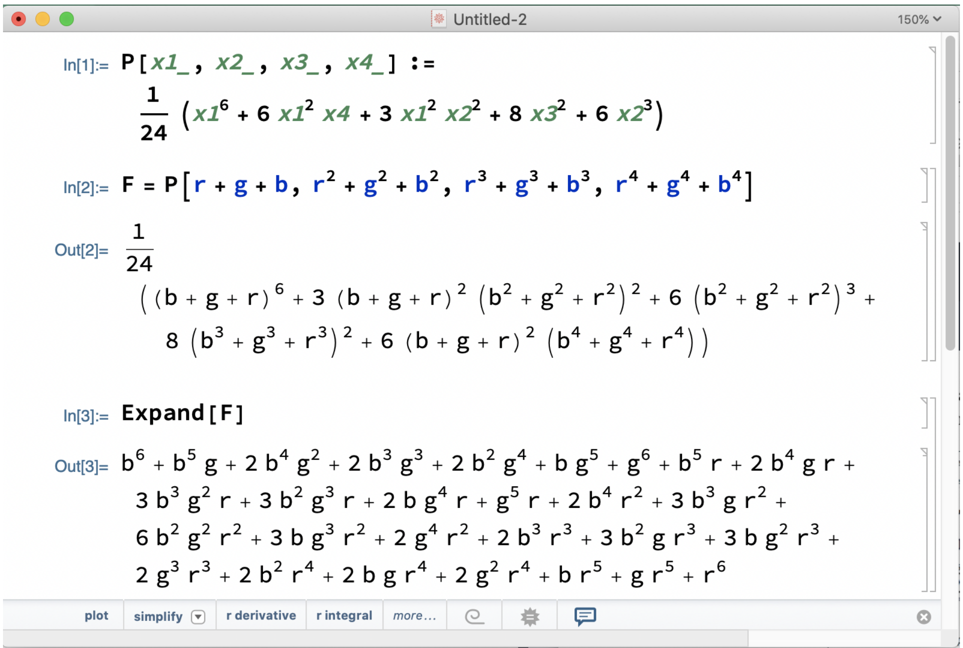


Figura 1.1: Snapshot al inventarului de modele produs de Mathematica pentru colorarea feţelor unui cub cu culorile r, g şi b.

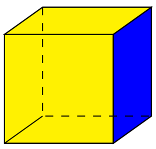
Coeficientul lui r^3g^2b în inventarul de modele este 3, deci sunt 3 colorări cu r de 3 ori, g de 2 ori şi b o dată.

Putem evita calculul laborios al inventarului de modele şi să calculăm direct coeficientul lui r^3g^2b. Observăm că termenul r^3g^2b nu apare în nici unul din polinoamele $(r^3+b^3+g^3)^2$, $(r^2+b^2+g^2)^3$, $(r+g+b)^2(r^4+g^4+b^4))$. Din definiţia lui $F(r,g,b)$ rezultă că coeficientul lui r^3g^2b în inventarul de modele este $(A+3\cdot B\cdot C)/24$ unde

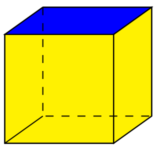
- $A=\binom{6}{3,2,1}=\frac{6!}{3!2!1!}=60$ este coeficientul lui r^3g^2b în $(r+g+b)^6$.
- B este coeficientul lui $r\cdot b$ în $(r+g+b)^2$, şi C este coeficientul lui r^2g^2 în $(r^2+g^2+b^2)^2$. Rezultă că $B=\binom{2}{1}=2$ şi $C=\binom{2}{1,1,0}=\frac{2!}{1!1!0!}=2$.

Deci coeficientul lui r^3g^2b în $F(r,g,b)$ este $(60+3\cdot 2\cdot 2)/24=3$.

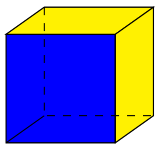
Cele 3 colorări neechivalente ale vârfurilor unui cub cu roşu (r) de 3 ori, galben (g) de două ori şi bleu (b) o dată sunt:



Cele trei feţe ascunse sunt roşii



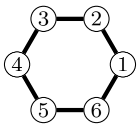
Cele trei feţe ascunse sunt roşii



Cele trei feţe ascunse sunt roşii

□

Exemplul 14. Benzenul este o hidrocarbură cu 6 atomi de carbon şi 6 atomi de hidrogen, fiecare legat la câte un atom de carbon. Ansamblul poziţiilor ocupate de atomii de carbon este un hexagon regulat



Câţi izomeri se pot obţine dacă se înlocuiesc în benzen 2 atomi de hidrogen cu 2 atomi de clor?

RĂSPUNS: Grupul de simetrii al acestui ansamblu de atomi este

$$\begin{aligned}D_6=\{&(1)(2)(3)(4)(5)(6),(1,2,3,4,5,6),(1,3,5)(2,4,6),\\&(1,4)(2.5)(3,6),(1,5,3)(2,6,4),(1,6,5,4,3,2),\\&(1)(4)(2,6)(3,5),(2)(5)(1,3)(4,6),(3)(6)(2,4)(1,5),\\&(1,2)(3,6)(4,5),(2,3)(1,4)(5,6),(1,6)(2,5)(3,4)\}.\end{aligned}$$

Rezultă că indexul de cicluri al lui D_6 este

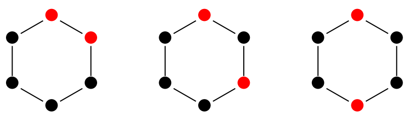
$$\frac{1}{12}\left(x_1^6+3\,x_1^2x_2^2+4\,x_2^3+2\,x_3^2+2\,x_6\right);$$

Fiecare din izomerii formaţi are 4 atomi de carbon legaţi cu hidrogen, şi ceilalţi 2 atomi de carbon legaţi cu clor. Pentru a-i diferenţia, colorăm cu roşu (r) componentele legate cu clor, şi cu negru (n) componentele legate cu hidrogen. Deci numărul căutat de izomeri este coeficientul termenului r^2n^4 în inventarul de modele

$$\begin{aligned} F_{D_6}(r,n) &= \frac{1}{12}\big((r+n)^6 + 3\,(r+n)^2(r^2+n^2)^2 + 4\,(r^2+n^2)^3 + \\ &\quad + 2\,(r^3+n^3) + 2\,(r^6+n^6)\big) \\ &= r^6 + r^5\,n + 3\,r^4\,n^2 + 3\,r^3\,n^3 + 3\,r^2\,n^4 + n^5\,r + n^6. \end{aligned}$$

Coeficientul lui r^2n^4 este 3.

În acest exemplu, corectitudiea răspunsului se poate verifica uşor: există 3 colorări neechivalente ale vârfurilor hexagonului regulat cu roşu de 2 ori şi negru de 4 ori:



□

1.6.7 Concluzii

- Au fost prezentate metode de rezolvare pentru două probleme de numărare a colorărilor unui ansamblu A cu n componente în prezenţa unui grup de simetrii G:

    1. Câte colorări are A dacă se folosesc culori din o mulţime de m culori?
    2. Câte colorări are A dacă se folosesc culori din o mulţime de m culori şi fiecare culoare y_i se foloseşte de exact n_i ori?

- Prima problemă se rezolvă cu formula din lema lui Burnside:

$$N = \frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G}|C_\pi| \quad \text{unde } C_\pi = \{c \in C \mid \pi(c) = c\} \text{ şi}$$
$$|C_\pi| = m^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n} \quad \text{dacă } \pi \text{ are tipul } [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n].$$

- A doua problemă se rezolvă cu formula de enumerare a lui Pólya:

    1. Mai întâi se calculează indexul de cicluri al lui G:

$$P_G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G} M_\pi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

unde $M_\pi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_n^{\lambda_n}$.

2. Apoi se calculează inventarul de modele al lui A cu culorile y_1, y_2, ..., y_m. Acesta este polinomul

$$F_G(y_1, y_2, \ldots, y_m) = P_G(\sum_{i=1}^m y_i, \sum_{i=1}^m y_i^2, \ldots, \sum_{i=1}^m y_i^n)$$

adică polinomul care se obţine din $P_G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ înlocuind fiecare x_j cu $\sum_{i=1}^m x_i^j$.

3. Răspunsul la problema 2 este coeficientul lui $y_1^{n_1} y_2^{n_2} \ldots y_m^{n_m}$ în polinomul $F_G(y_1, y_2, \ldots, y_m)$.

- Pentru calculul inventarului de modele se recomandă folosirea unui sistem de calcul simbolic, precum Mathematica.
- Coeficientul unui singur termen din inventarul de modele se poate calcula şi direct, ca în Exemplul 13, folosind formula de calcul a coeficienţilor multinomiali din secţiunea 1.1.4:

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_r)^n = \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_r=n} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_r^{n_r}.$$

1.6.8 Exerciţii

1. Se dau permutările

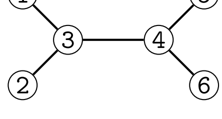
$$\pi_1 = \langle 3, 2, 1, 5, 7, 6, 4, 9, 8, 10 \rangle,$$
$$\pi_2 = \langle 10, 9, 3, 5, 4, 8, 7, 6, 1, 2 \rangle.$$

(a) Calculaţi $\pi_1^{-1}, \pi_1 \circ \pi_2$ şi π_1^3.

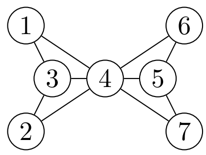
(b) Calculaţi structurile ciclice canonice ale permutărilor π_1 şi π_2.

(c) Ce ordin are π_2?

2. Să se determine grupul de simetrii, indexul de cicluri şi numărul de 2-colorări pentru componentele numerotate ale ansamblului rigid ilustrat mai jos. Presupunem că ansamblul poate fi rotit şi răsucit în orice fel.



3. Să se determine grupul de simetrii, indexul de cicluri şi numărul de 3-colorări pentru componentele numerotate ale ansamblului ilustrat mai jos. Presupunem că ansamblul poate fi rotit şi răsucit în orice fel.

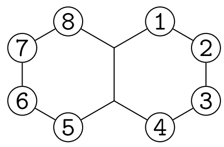


4. În câte feluri se pot colora muchiile unui tetraedru regulat cu culori din o mulţime de 3 culori?

5. Un zar este un cub ale cărui feţe sunt numerotate de la 1 la 6. Câte zaruri diferite se pot forma?

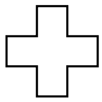
6. Să se determine grupul de simetrii şi indexul de cicluri al ansamblului de vârfuri al unui octaedru regulat. Presupunem că octaedrul poate fi rotit şi răsucit în orice fel.

7. Naftalina este o hidrocarbură cu 10 atomi de carbon aranjaţi în o structură dublu-hexagonală ca în figura de mai jos, şi 8 atomi de hidrogen legaţi la atomii de carbon de la poziţiile marcate cu numerele de la 1 la 8.



   (a) Naftolul se obţine înlocuind un atom de hidrogen cu un grup hidroxil (OH). Câţi izomeri de naftol se pot produce?
   (b) Tetrametilnaftalina se obţine înlocuind în molecula de naftalină 4 atomi de hidrogen cu grupuri de metil (CH_3). Câţi izomeri de tetrametilnaftalină se pot produce?
   (c) Câţi izomeri se pot produce dacă înlocuim 3 atomi de hidrogen cu grupuri hidroxil (OH) şi alţi 3 atomi de hidrogen cu grupuri de metil (CH_3)?
   (d) Câţi izomeri se pot produce dacă înlocuim 2 atomi de hidrogen cu grupuri hidroxil (OH), alţi 2 atomi de hidrogen cu grupuri de metil (CH_3), şi alţi 2 atomi de hidrogen cu grupuri de carboxil (COOH)?

8. O agenţie de ajutor medical intenţionează să proiecteze un simbol de forma unei cruci regulate, ca în figura de mai jos:



Pentru a simboliza scopul agenţiei şi caracterul ei internaţional, s-a decis ca crucea sa fie albă, cu fiecare din cele 12 segmente de pe contur colorat cu una din culorile roşu, verde, albastru sau galben, şi un număr egal de simboluri de fiecare culoare. Presupunând ca acest simbol poate fi rotit şi răsucit în orice fel, câte moduri diferite sunt de a produce acest simbol? Exemple de astfel de colorări diferite sunt: