Teoria Grafurilor și Combinatorică

Tehnici Avansate de Numărare

octombrie 2020

Observații preliminare

- Multe probleme de numărare nu pot fi rezolvate cu metodele prezentate până acum.
- Exemple:
  1. Câte șiruri de biți de lungime n nu conțin două zerouri consecutive?
  2. În câte feluri se pot aloca 7 lucrări la 3 angajați astfel încât fiecare angajat să primească cel puțin o lucrare?

Observații preliminare

- Multe probleme de numărare nu pot fi rezolvate cu metodele prezentate până acum.
- Exemple:
  1. Câte șiruri de biți de lungime n nu conțin două zerouri consecutive?
  2. În câte feluri se pot aloca 7 lucrări la 3 angajați astfel încât fiecare angajat să primească cel puțin o lucrare?

  Scopul părții a 2-a a cursului: prezentarea unor tehnici mai avansate de numărare:

Observații preliminare

- Multe probleme de numărare nu pot fi rezolvate cu metodele prezentate până acum.
- Exemple:
  1. Câte șiruri de biți de lungime n nu conțin două zerouri consecutive?
  2. În câte feluri se pot aloca 7 lucrări la 3 angajați astfel încât fiecare angajat să primească cel puțin o lucrare?

  Scopul părții a 2-a a cursului: prezentarea unor tehnici mai avansate de numărare:
  - Relații de recurență

Observații preliminare

- Multe probleme de numărare nu pot fi rezolvate cu metodele prezentate până acum.
- Exemple:
  1. Câte șiruri de biți de lungime n nu conțin două zerouri consecutive?
  2. În câte feluri se pot aloca 7 lucrări la 3 angajați astfel încât fiecare angajat să primească cel puțin o lucrare?

  Scopul părții a 2-a a cursului: prezentarea unor tehnici mai avansate de numărare:
  - Relații de recurență
  - Rezolvarea relațiilor de recurență liniară

Exemplu

Numărul bacteriilor din o colonie se dublează în fiecare oră. Dacă într-o colonie sunt inițial 5 bacterii, câte vor fi după n ore?

RĂSPUNS. Fie a_n numărul de bacterii după n ore.

- $a_0 = 5$ (cunoștințe inițiale)
- $a_n = 2 \cdot a_{n-1}$ pentru $n > 0$ (evoluție)

Relații de recurență

Exemplu

Numărul bacteriilor din o colonie se dublează în fiecare oră. Dacă într-o colonie sunt inițial 5 bacterii, câte vor fi după n ore?

RĂSPUNS. Fie a_n numărul de bacterii după n ore.

- $a_0 = 5$ (cunoștințe inițiale)
- $a_n = 2 \cdot a_{n-1}$ pentru $n > 0$ (evoluție)

- O relație de recurență pentru secvența $\{a_n\}$ este o ecuație care exprimă a_n în funcție de 0 sau mai mulți termeni precedenți $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ ai secvenței, pentru toți $n \geq n_0$, unde $n_0 \geq 0$.

Exemplu

Numărul bacteriilor din o colonie se dublează în fiecare oră. Dacă într-o colonie sunt inițial 5 bacterii, câte vor fi după n ore?

RĂSPUNS. Fie a_n numărul de bacterii după n ore.

- $a_0 = 5$ (cunoștințe inițiale)
- $a_n = 2 \cdot a_{n-1}$ pentru $n > 0$ (evoluție)

- O relație de recurență pentru secvența $\{a_n\}$ este o ecuație care exprimă a_n în funcție de 0 sau mai mulți termeni precedenți $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ ai secvenței, pentru toți $n \geq n_0$, unde $n_0 \geq 0$.
- O soluție a relației de recurență este o formulă de calcul direct a lui a_n din n, care satisface relația de recurență.

Relații de recurență

Exemplu

Numărul bacteriilor din o colonie se dublează în fiecare oră. Dacă într-o colonie sunt inițial 5 bacterii, câte vor fi după n ore?

RĂSPUNS. Fie a_n numărul de bacterii după n ore.

- $a_0 = 5$ (cunoștințe inițiale)
- $a_n = 2 \cdot a_{n-1}$ pentru $n > 0$ (evoluție)

- O relație de recurență pentru secvența $\{a_n\}$ este o ecuație care exprimă a_n în funcție de 0 sau mai mulți termeni precedenți $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ ai secvenței, pentru toți $n \geq n_0$, unde $n_0 \geq 0$.
- O soluție a relației de recurență este o formulă de calcul direct a lui a_n din n, care satisface relația de recurență.

Vor fi prezentate tehnici de rezolvare a unor tipuri importante de relații de recurență.

- $a_0 = 3, a_1 = 5, a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ pentru $n \geq 2$.
  Toate elementele lui $\{a_n\}$ pot fi calculate recursiv:

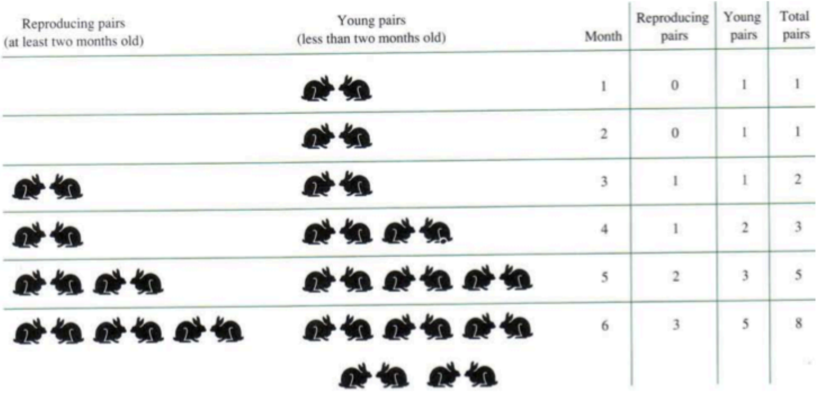
$$a_2 = a_1 - a_0 = 5 - 3 = 2$$
$$a_3 = a_2 - a_1 = 2 - 5 = -3$$
$$\ldots$$

Putem găsi o formulă generală de calcul direct a lui a_n în funcție de n?

- $a_0 = 3, a_1 = 5, a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ pentru $n \geq 2$.
  Toate elementele lui $\{a_n\}$ pot fi calculate recursiv:
  $$a_2 = a_1 - a_0 = 5 - 3 = 2$$
  $$a_3 = a_2 - a_1 = 2 - 5 = -3$$
  $$\ldots$$
  Putem găsi o formulă generală de calcul direct a lui a_n în funcție de n?
- $a_0 = 0, a_1 = 3, a_n = 2 \cdot a_{n-1} - a_{n-2}$ pentru $n \geq 2$. Toate elementele lui $\{a_n\}$ pot fi calculate recursiv:
  $$a_2 = 2\,a_1 - a_0 = 6$$
  $$a_3 = 2\,a_2 - a_1 = 9$$
  $$\ldots$$
  Se poate demonstra prin inducție că $a_n = 3\,n$ pentru toți $n \geq 0$.

Exemplu: iepuri și numere Fibonacci

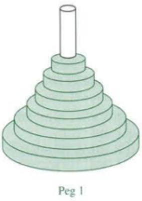
O pereche tânără de iepuri începe să se înmulțească la vârsta de 2 luni, dând naștere lunar la o pereche de iepuri. Se presupune că o pereche de iepuri cu vârsta de 0 luni este adusă pe o insulă. Să se determine o relație de recurență pentru numărul de iepuri de pe insulă după n luni.



Reproducing pairs (at least two months old)	Young pairs (less than two months old)	Month	Reproducing pairs	Young pairs	Total pairs
		1	0	1	1
		2	0	1	1
		3	1	1	2
		4	1	2	3
		5	2	3	5
		6	3	5	8

$f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ if $n \geq 2$.

Exemplu: Turnul din Hanoi



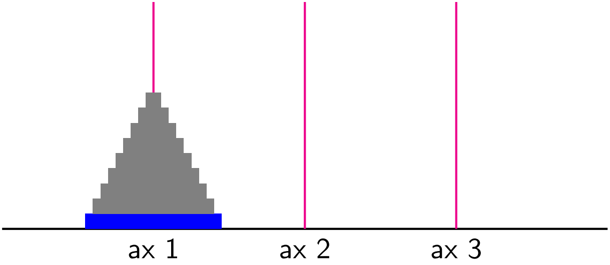
- Să se mute toate discurile pe axul 2 în ordinea mărimii lor, cu discul cel mai mare așezat dedesubt.
- Discurile pot fi mutate unul câte unul de pe un ax pe altul cu condiția ca niciodată să nu se pună un disc peste unul mai mic.

  Întrebare: Care este numărul minim de mutări necesare pentru a rezolva problema turnului din Hanoi cu n discuri?

Exemplu: Turnul din Hanoi (continuare)

Răspuns: Fie H_n nr. minim de mutări necesare pentru a pune n discuri în ordinea mărimii, de pe un ax pe altul.

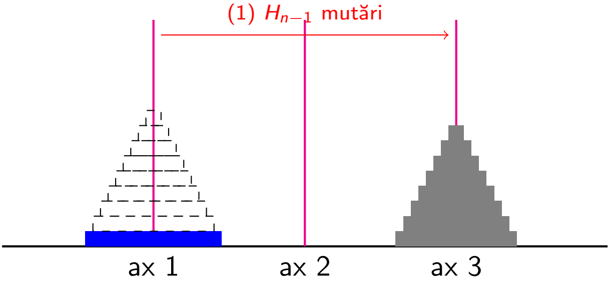
- Pentru a pune cel mai mare disc la baza axului 2, va trebui mai întâi să mutăm $n-1$ discuri mai mici de pe axul 1 pe axul 3. Nr. minim de mutări pentru a face acest lucru este H_{n-1}.
- După ce am pus cel mai mare disc de pe axul 1 pe axul 2, putem efectua H_{n-1} mutări pentru a muta discurile de pe axul 3 pe axul 2.



Exemplu: Turnul din Hanoi (continuare)

Răspuns: Fie H_n nr. minim de mutări necesare pentru a pune n discuri în ordinea mărimii, de pe un ax pe altul.

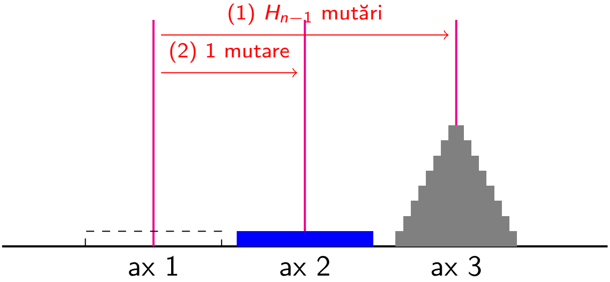
- Pentru a pune cel mai mare disc la baza axului 2, va trebui mai întâi să mutăm $n-1$ discuri mai mici de pe axul 1 pe axul 3. Nr. minim de mutări pentru a face acest lucru este H_{n-1}.
- După ce am pus cel mai mare disc de pe axul 1 pe axul 2, putem efectua H_{n-1} mutări pentru a muta discurile de pe axul 3 pe axul 2.



Exemplu: Turnul din Hanoi (continuare)

Răspuns: Fie H_n nr. minim de mutări necesare pentru a pune n discuri în ordinea mărimii, de pe un ax pe altul.

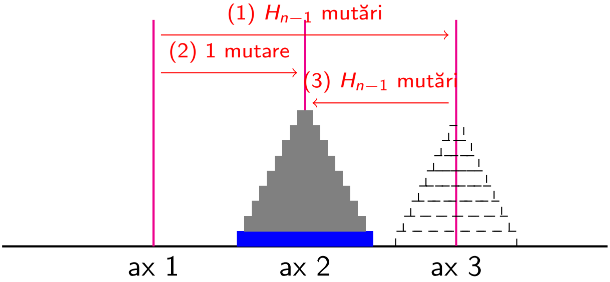
- Pentru a pune cel mai mare disc la baza axului 2, va trebui mai întâi să mutăm $n-1$ discuri mai mici de pe axul 1 pe axul 3. Nr. minim de mutări pentru a face acest lucru este H_{n-1}.
- După ce am pus cel mai mare disc de pe axul 1 pe axul 2, putem efectua H_{n-1} mutări pentru a muta discurile de pe axul 3 pe axul 2.



Exemplu: Turnul din Hanoi (continuare)

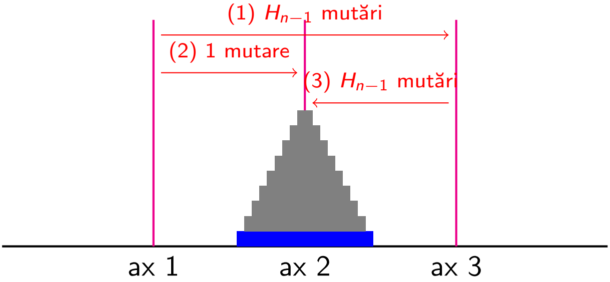
Răspuns: Fie H_n nr. minim de mutări necesare pentru a pune n discuri în ordinea mărimii, de pe un ax pe altul.

- Pentru a pune cel mai mare disc la baza axului 2, va trebui mai întâi să mutăm $n-1$ discuri mai mici de pe axul 1 pe axul 3. Nr. minim de mutări pentru a face acest lucru este H_{n-1}.
- După ce am pus cel mai mare disc de pe axul 1 pe axul 2, putem efectua H_{n-1} mutări pentru a muta discurile de pe axul 3 pe axul 2.



Răspuns: Fie H_n nr. minim de mutări necesare pentru a pune n discuri în ordinea mărimii, de pe un ax pe altul.

- Pentru a pune cel mai mare disc la baza axului 2, va trebui mai întâi să mutăm $n-1$ discuri mai mici de pe axul 1 pe axul 3. Nr. minim de mutări pentru a face acest lucru este H_{n-1}.
- După ce am pus cel mai mare disc de pe axul 1 pe axul 2, putem efectua H_{n-1} mutări pentru a muta discurile de pe axul 3 pe axul 2.



$\Rightarrow H_n = H_{n-1} + 1 + H_{n-1} = 2H_{n-1} + 1$. Se observă că $H_1 = 1$.

Exemplu: Turnul din Hanoi (continuat)

- Putem aplica o metodă iterativă de aflare a unei formule de calcul pentru H_n direct din n atunci când $n > 1$:

$$\begin{aligned}
H_n &= 2\,H_{n-1} + 1\\
&= 2(2\,H_{n-2} + 1) + 1 = 2^2\,H_{n-2} + 2 + 1\\
&= 2^2(2\,H_{n-3} + 1) + 2 + 1 = 2^3\,H_{n-3} + 2^2 + 2 + 1\\
&\vdots\\
&= 2^{n-1}H_1 + 2^{n-2} + \ldots + 2 + 1\\
&= 2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2 + 1\\
&= \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1
\end{aligned}$$

Exemplu: Turnul din Hanoi (continuat)

- Putem aplica o metodă iterativă de aflare a unei formule de calcul pentru H_n direct din n atunci când $n > 1$:

$$\begin{aligned}
H_n &= 2\,H_{n-1} + 1 \\
&= 2(2\,H_{n-2} + 1) + 1 = 2^2\,H_{n-2} + 2 + 1 \\
&= 2^2(2\,H_{n-3} + 1) + 2 + 1 = 2^3\,H_{n-3} + 2^2 + 2 + 1 \\
&\vdots \\
&= 2^{n-1} H_1 + 2^{n-2} + \ldots + 2 + 1 \\
&= 2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2 + 1 \\
&= \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1
\end{aligned}$$

Exemplu: Șiruri speciale de biți

- Să se găsească o relație de recurență și condițiile inițiale pentru numărul de șiruri de biți de lungime n care nu au două zerouri consecutive. Câte astfel de șiruri de lungime 5 există?

A: Avem de numărat a două lucruri distincte:

1. Șirurile de n-biți fără 2 zerouri consec., care se termină cu 1:
2. Șirurile de n biți fără 2 zerouri consec. care se termină cu 0:

			Nr. șiruri de lungime n fără 00:
Se termină cu 1:	Orice șir de lungime $n-1$ fără 00	1	a_{n-1}
Se termină cu 0:	Orice șir de lungime $n-2$ fără 00	1 0	a_{n-2}

Total: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

Șirurile cu lungimea 1 sunt 0 and 1 $\Rightarrow a_1 = 2$, iar șirurile cu lungimea 2 fără 00 sunt $01, 10, 11 \Rightarrow a_2 = 3$.

Exemplu: Șiruri speciale de biți (continuare)

Numărul a_n de șiruri de biți de lungime n fără 00 satisface relația de recurență

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 3, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ dacă } n \geq 2.$$

$\Rightarrow$ $a_3 = a_1 + a_2 = 2 + 3 = 5$

$\Rightarrow$ $a_4 = a_2 + a_3 = 3 + 5 = 8$

$\Rightarrow$ $a_5 = a_3 + a_4 = 5 + 8 = 13.$

Relații de recurență liniară

- O relație omogenă de recurență liniară de gradul k cu coeficienți constanți este o relație de forma

$$a_n = c_1\, a_{n-1} + c_2\, a_{n-2} + \ldots + c_k\, a_{n-k},$$

unde $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ și $c_k \neq 0$.

Dacă se cunosc cele k condiții inițiale

- $a_0 = C_0,\ a_1 = C_1,\ \ldots,\ a_{k-1} = C_{k-1}$,

atunci se poate calcula recursiv a_n pentru toți $n \geq k$.

Exemplu (Relații de recurență liniară)

- $\{f_n\}$ unde $f_0 = f_1 = 1$, și $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ dacă $n > 1$.
- $\{P_n\}$ unde $P_0 = 1$, și $P_n = 1.11\, P_{n-1}$ dacă $n > 0$.

Exemplu (Relații de recurență neliniară)

$a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1}^2 + a_{n-2}$ pentru toți $n > 1$.

Relații de recurență liniară

- Apar frecvent în procesul de modelare a problemelor.
- Se poate determina o formulă care calculează a_n direct din n.

Ecuație caracteristică.

- Ecuația caracteristică a unei recurențe liniare

$$a_n = c_1\, a_{n-1} + c_2\, a_{k-2} + \ldots + c_k\, a_{n-k}$$

este $r^k - c_1\, r^{k-1} - c_2\, r^{k-2} - \ldots - c_k = 0$.

Această ecuație are t rădăcini complexe $r_1, r_2, \ldots, r_t$ cu multiplicitățile $m_1, \ldots, m_t$, astfel încât $m_1 + m_2 + \ldots + m_t = k$. Acest lucru înseamnă că

$$r^k - c_1\, r^{k-1} - c_2\, r^{k-2} - \ldots - c_k = (r - r_1)^{m_1} \cdot (r - r_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (r - r_t)^{m_t}.$$

Metode de rezolvare a ecuațiilor caracteristice

$$r^k - c_1 \cdot r^{k-1} - c_2\, r^{k-2} - \ldots - c_k = 0.$$

- Pentru $k = 2$ avem $r^2 - c_1\, r - c_2 = 0$ are rădăcinile

$$r_{1,2} = \frac{c_1 \pm \sqrt{c_1^2 + 4 \cdot c_2}}{2}.$$

    - Dacă $c_1^2 + 4 \cdot c_2 = 0$, ecuația are o rădăcina $r_1 = \frac{c_1}{2}$ cu multiplicitatea $m_1 = 2$.
    - Dacă $c_1^2 + 4 \cdot c_2 \neq 0$, ecuația are 2 rădăcini (posibil complexe) r_1, r_2 cu multiplicitățile $m_1 = m_2 = 1$.
- Se cunosc formule de calcul cu radicali doar pentru ecuații de grad $n \in \{2, 3, 4\}$.
- Dacă $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{Q}$, avem o metodă de găsire a rădăcinilor raționale (vezi slide-ul următor).

Criteriu de găsire a rădăcinilor raționale

$$r^k - c_1\, r^{k-1} - c_2\, r_2^{k-2} - \ldots - c_k = 0, \quad c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{Q}.$$

- Eliminăm numitorii din coeficienți înmulțind ecuația cu cel mai mic multiplu comun al numitorilor acestora. De exemplu:

$$r^3 + \frac{1}{6}\, r^2 - \frac{14}{9}\, r + \frac{2}{3} = 0 \,|\cdot 18$$
$$\Rightarrow 18\, r^3 + 3\, r^2 - 28\, r + 12 = 0$$

- Dacă $\frac{p}{q}$ este rădăcină cu $\gcd(p, q) = 1$ atunci
  - p divide termenul liber, iar q divide coeficientul lui r^n.

  În exemplul nostru, $p|12$ și $q|18$, deci
  $p \in \{\pm 12, \pm 6, \pm 4, \pm 3, \pm 2, \pm 1\}$,
  $q \in \{\pm 18, \pm 9, \pm 6, \pm 3, \pm 2, \pm 1\}$.
- Putem scrie un program care verifică toate combinațiile $\Rightarrow$ rădăcinile raționale $r_1 = -\frac{3}{2}$ cu $m_1 = 1$ și $r_2 = \frac{2}{3}$ cu $m_2 = 2$, deci $r^3 + \frac{1}{6}\, r^2 - \frac{14}{9}\, r + \frac{2}{3} = (r + \frac{3}{2}) \cdot (r - \frac{2}{3})^2$.

Se consideră relația de recurență

$$a_n = c_1\, a_{n-1} + c_2\, a_{n-2} + \ldots + c_k\, a_{n-k},\ \ a_0 = C_0, \ldots, a_{k-1} = C_{k-1}.$$

Dacă ecuația caracteristică are rădăcinile $r_1, \ldots, r_t$ cu multiplicitățile $m_1, \ldots, m_t$, atunci

$$a_n = p_1(n)\, r_1^n + p_2(n)\, r_2^n + \ldots + p_t(n)\, r_t^n$$

unde fiecare $p_i(n)$ este un polinom în n cu grad mai mic ca m_i, adică

$$p_i(n) = b_{i,0} \cdot n^{m_i-1} + b_{i,1} \cdot n^{m_i-2} + \ldots + b_{i,m_i-1}.$$

Valorile coeficienților $b_{i,j}$ se determină din condițiile inițiale

$$a_0 = C_0, \ldots, a_{k-1} = C_{k-1}.$$

- Să se afle soluțiile relației de recurență

$$a_n = -3\,a_{n-1} - 3\,a_{n-2} - a_{n-3}$$

care satisface condițiile inițiale $a_0 = 1$, $a_1 = -2$, și $a_2 = -1$.

- Să se afle soluțiile relației de recurență

$$a_n = -3\, a_{n-1} - 3\, a_{n-2} - a_{n-3}$$

care satisface condițiile inițiale $a_0 = 1$, $a_1 = -2$, și $a_2 = -1$.

- RĂSPUNS. Ecuația caracteristică a relației de recurență este $r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = 0$, adică $(r+1)^3 = 0$, care are singura rădăcină $r = -1$ cu multiplicitatea 3.

- Să se afle soluțiile relației de recurență

$$a_n = -3\,a_{n-1} - 3\,a_{n-2} - a_{n-3}$$

care satisface condițiile inițiale $a_0 = 1$, $a_1 = -2$, și $a_2 = -1$.

- RĂSPUNS. Ecuația caracteristică a relației de recurență este $r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = 0$, adică $(r+1)^3 = 0$, care are singura rădăcină $r = -1$ cu multiplicitatea 3.

  $\Rightarrow a_n = (A\,n^2 + B\,n + C)\cdot(-1)^n$.

- Să se afle soluțiile relației de recurență

$$a_n = -3\,a_{n-1} - 3\,a_{n-2} - a_{n-3}$$

  care satisface condițiile inițiale $a_0 = 1$, $a_1 = -2$, și $a_2 = -1$.

- RĂSPUNS. Ecuația caracteristică a relației de recurență este $r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = 0$, adică $(r+1)^3 = 0$, care are singura rădăcină $r = -1$ cu multiplicitatea 3.

  $\Rightarrow a_n = (A\,n^2 + B\,n + C)\cdot(-1)^n.$

  Mai avem de aflat coeficienții A, B, C folosind informațiile despre condițiile inițiale:

$$\left\{\begin{array}{l} a_0 = 1 = C \\ a_1 = -2 = -A - B - C \\ a_2 = -1 = 4\,A + 2\,B + C \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} C = 1 \\ B = 3 \\ A = -2 \end{array}\right.$$

- Să se afle soluțiile relației de recurență

$$a_n = -3\,a_{n-1} - 3\,a_{n-2} - a_{n-3}$$

care satisface condițiile inițiale $a_0 = 1$, $a_1 = -2$, și $a_2 = -1$.

- RĂSPUNS. Ecuația caracteristică a relației de recurență este $r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = 0$, adică $(r + 1)^3 = 0$, care are singura rădăcină $r = -1$ cu multiplicitatea 3.

  $\Rightarrow a_n = (A\,n^2 + B\,n + C) \cdot (-1)^n$.

  Mai avem de aflat coeficienții A, B, C folosind informațiile despre condițiile inițiale:

$$\begin{cases} a_0 = 1 = C \\ a_1 = -2 = -A - B - C \\ a_2 = -1 = 4\,A + 2\,B + C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 1 \\ B = 3 \\ A = -2 \end{cases}$$

  $\Rightarrow a_n = (1 + 3\,n - 2\,n^2)(-1)^n$.

Definiție

O relație de recurență liniară neomogenă cu coeficienți constanți este

$$a_n = c_1\, a_{n-1} + c_2\, a_{n-2} + \ldots + c_k\, a_{n-k} + F(n),$$

unde $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ și $F(n)$ este o funcție diferită de funcția constantă 0, care depinde doar de n. Recurența liniară

$$a_n = c_1\, a_{n-1} + c_2\, a_{n-2} + \ldots + c_k\, a_{n-k}$$

se numește relația omogenă asociată.

Recurențe liniare neomogene cu coeficienți constanți

Definiție

O relație de recurență liniară neomogenă cu coeficienți constanți este

$$a_n = c_1\, a_{n-1} + c_2\, a_{n-2} + \ldots + c_k\, a_{n-k} + F(n),$$

unde $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ și $F(n)$ este o funcție diferită de funcția constantă 0, care depinde doar de n. Recurența liniară

$$a_n = c_1\, a_{n-1} + c_2\, a_{n-2} + \ldots + c_k\, a_{n-k}$$

se numește relația omogenă asociată.

Exemple

Definiție

O relație de recurență liniară neomogenă cu coeficienți constanți este

$$a_n = c_1\, a_{n-1} + c_2\, a_{n-2} + \ldots + c_k\, a_{n-k} + F(n),$$

unde $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ și $F(n)$ este o funcție diferită de funcția constantă 0, care depinde doar de n. Recurența liniară

$$a_n = c_1\, a_{n-1} + c_2\, a_{n-2} + \ldots + c_k\, a_{n-k}$$

se numește relația omogenă asociată.

EXEMPLE

1. $a_n = a_{n-1} + 2^n$ este o recurență neomogenă.
   Relația omogenă asociată este $a_n = a_{n-1}$.

Recurențe liniare neomogene cu coeficienți constanți

Definiție

O relație de recurență liniară neomogenă cu coeficienți constanți este

$$a_n = c_1\, a_{n-1} + c_2\, a_{n-2} + \ldots + c_k\, a_{n-k} + F(n),$$

unde $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ și $F(n)$ este o funcție diferită de funcția constantă 0, care depinde doar de n. Recurența liniară

$$a_n = c_1\, a_{n-1} + c_2\, a_{n-2} + \ldots + c_k\, a_{n-k}$$

se numește relația omogenă asociată.

Exemple

1. $a_n = a_{n-1} + 2^n$ este o recurență neomogenă.
   Relația omogenă asociată este $a_n = a_{n-1}$.
2. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + n^2 + n + 1$ este o recurență neomogenă.
   Relația omogenă asociată este $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

Recurențe liniare neomogene cu coeficienți constanți

Dacă $\{a_n^{(p)}\}$ este o soluție particulară a recurenței

$$a_n = c_1\, a_{n-1} + c_2\, a_{n-2} + \ldots + c_k\, a_{n-k} + F(n),$$

atunci orice altă soluție este de forma $\{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$, unde $\{a_n^{(h)}\}$ este o soluție a recurenței omogene asociate

$$a_n = c_1\, a_{n-1} + c_2\, a_{n-2} + \ldots + c_k\, a_{n-k}.$$

Recurențe liniare neomogene cu coeficienți constanți

Dacă $\{a_n^{(p)}\}$ este o soluție particulară a recurenței

$$a_n = c_1\, a_{n-1} + c_2\, a_{n-2} + \ldots + c_k\, a_{n-k} + F(n),$$

atunci orice altă soluție este de forma $\{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$, unde $\{a_n^{(h)}\}$ este o soluție a recurenței omogene asociate

$$a_n = c_1\, a_{n-1} + c_2\, a_{n-2} + \ldots + c_k\, a_{n-k}.$$

OBSERVAȚII:

Recurențe liniare neomogene cu coeficienți constanți

Dacă $\{a_n^{(p)}\}$ este o soluție particulară a recurenței

$$a_n = c_1\, a_{n-1} + c_2\, a_{n-2} + \ldots + c_k\, a_{n-k} + F(n),$$

atunci orice altă soluție este de forma $\{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$, unde $\{a_n^{(h)}\}$ este o soluție a recurenței omogene asociate

$$a_n = c_1\, a_{n-1} + c_2\, a_{n-2} + \ldots + c_k\, a_{n-k}.$$

OBSERVAȚII:

- Știm cum să calculăm $\{a_n^{(h)}\}$.

Dacă $\{a_n^{(p)}\}$ este o soluție particulară a recurenței

$$a_n = c_1\, a_{n-1} + c_2\, a_{n-2} + \ldots + c_k\, a_{n-k} + F(n),$$

atunci orice altă soluție este de forma $\{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$, unde $\{a_n^{(h)}\}$ este o soluție a recurenței omogene asociate

$$a_n = c_1\, a_{n-1} + c_2\, a_{n-2} + \ldots + c_k\, a_{n-k}.$$

OBSERVAŢII:

- Știm cum să calculăm $\{a_n^{(h)}\}$.
- Cum putem afla o soluție particulară $\{a_n^{(p)}\}$?

Dacă $F(n) = q(n)\, s^n$ cu $s \in \mathbb{R}$ și $q(n)$ un polinom de gradul t în n, atunci

1. Dacă s nu este rădăcină a ecuației caracteristice a recurenței liniare omogene asociate, atunci există o soluție particulară

$$a_n^{(p)} = p(n)\, s^n \text{ cu } p(n) \text{ polinom de grad cel mult } t \text{ în } n.$$

2. Dacă s este o rădăcină cu multiplicitatea m a recurenței liniare omogene asociate, atunci există o soluție particulară

$$a_n^{(p)} = n^m \cdot p(n)\, s^n \text{ cu } p(n) \text{ polinom de grad cel mult } t \text{ în } n.$$

Să se afle soluția generală a recurenței liniare neomogene

$$a_n = 6\,a_{n-1} - 9\,a_{n-2} + \underbrace{n^2 \cdot 2^n}_{F(n)}$$

Să se afle soluția generală a recurenței liniare neomogene

$$a_n = 6\,a_{n-1} - 9\,a_{n-2} + \underbrace{n^2 \cdot 2^n}_{F(n)}$$

RĂSPUNS: Recurența liniară omogenă asociată este $a_n = 6\,a_{n-1} - 9\,a_{n-2}$. Ecuația ei caracteristică este $r^2 - 6\,r + 9 = 0$, care are o singură rădăcină, $r = 3$, cu multiplicitatea 2.

Să se afle soluția generală a recurenței liniare neomogene

$$a_n = 6\,a_{n-1} - 9\,a_{n-2} + \underbrace{n^2 \cdot 2^n}_{F(n)}$$

RĂSPUNS: Recurența liniară omogenă asociată este $a_n = 6\,a_{n-1} - 9\,a_{n-2}$. Ecuația ei caracteristică este $r^2 - 6\,r + 9 = 0$, care are o singură rădăcină, $r = 3$, cu multiplicitatea 2.

$\Rightarrow$ soluția părții omogene este $a_n^{(h)} = (b_1\,n + b_0)\,3^n$.

Să se afle soluția generală a recurenței liniare neomogene

$$a_n = 6\,a_{n-1} - 9\,a_{n-2} + \underbrace{n^2 \cdot 2^n}_{F(n)}$$

RĂSPUNS: Recurența liniară omogenă asociată este $a_n = 6\,a_{n-1} - 9\,a_{n-2}$. Ecuația ei caracteristică este $r^2 - 6\,r + 9 = 0$, care are o singură rădăcină, $r = 3$, cu multiplicitatea 2.
$\Rightarrow$ soluția părții omogene este $a_n^{(h)} = (b_1\,n + b_0)\,3^n$.
$F(n)$ este de forma $q(n)\,s^n$ unde $q(n)$ este un polinom de gradul $t = 2$, și $s = 2$ nu este rădăcină a ecuației caracteristice a recurenței omogene asociate $\Rightarrow$ o soluție particulară este $a_n^{(p)} = (A\,n^2 + B\,n + C)\,2^n$.

Să se afle soluția generală a recurenței liniare neomogene

$$a_n = 6\,a_{n-1} - 9\,a_{n-2} + \underbrace{n^2 \cdot 2^n}_{F(n)}$$

RĂSPUNS: Recurența liniară omogenă asociată este $a_n = 6\,a_{n-1} - 9\,a_{n-2}$. Ecuația ei caracteristică este $r^2 - 6\,r + 9 = 0$, care are o singură rădăcină, $r = 3$, cu multiplicitatea 2.
$\Rightarrow$ soluția părții omogene este $a_n^{(h)} = (b_1\,n + b_0)\,3^n$.
$F(n)$ este de forma $q(n)\,s^n$ unde $q(n)$ este un polinom de gradul $t = 2$, și $s = 2$ nu este rădăcină a ecuației caracteristice a recurenței omogene asociate $\Rightarrow$ o soluție particulară este $a_n^{(p)} = (A\,n^2 + B\,n + C)\,2^n$.
Din $a_n^{(p)} = 6\,a_{n-1}^{(p)} - 9\,a_{n-2}^{(p)} + n^2 \cdot 2^n$ obținem

$$(A\,n^2 + B\,n + C)\,2^n = 6\,(A\,(n-1)^2 + B\,(n-1) + C)\,2^{n-1} - 9\,(A\,(n-2)^2 + B\,(n-2) + C)\,2^{n-2} + n^2 \cdot 2^n$$

de unde rezultă $2^{n-2}((A-4)\cdot n^2 + (B - 12\,A)\cdot n + C - 6\,B + 24\,A) = 0$
$\Rightarrow C = 192, B = 48, A = 4$

Să se afle soluția generală a recurenței liniare neomogene

$$a_n = 6\,a_{n-1} - 9\,a_{n-2} + \underbrace{n^2 \cdot 2^n}_{F(n)}$$

RĂSPUNS: Recurența liniară omogenă asociată este $a_n = 6\,a_{n-1} - 9\,a_{n-2}$. Ecuația ei caracteristică este $r^2 - 6\,r + 9 = 0$, care are o singură rădăcină, $r = 3$, cu multiplicitatea 2.
$\Rightarrow$ soluția părții omogene este $a_n^{(h)} = (b_1\,n + b_0)\,3^n$.
$F(n)$ este de forma $q(n)\,s^n$ unde $q(n)$ este un polinom de gradul $t = 2$, și $s = 2$ nu este rădăcină a ecuației caracteristice a recurenței omogene asociate $\Rightarrow$ o soluție particulară este $a_n^{(p)} = (A\,n^2 + B\,n + C)\,2^n$.
Din $a_n^{(p)} = 6\,a_{n-1}^{(p)} - 9\,a_{n-2}^{(p)} + n^2 \cdot 2^n$ obținem

$$\begin{aligned}(A\,n^2 + B\,n + C)\,2^n = 6\,(A\,(n-1)^2 + B\,(n-1) + C)\,2^{n-1}\\ - 9\,(A\,(n-2)^2 + B\,(n-2) + C)\,2^{n-2} + n^2 \cdot 2^n\end{aligned}$$

de unde rezultă $2^{n-2}((A-4) \cdot n^2 + (B - 12\,A) \cdot n + C - 6\,B + 24\,A) = 0$
$\Rightarrow C = 192, B = 48, A = 4$
$\Rightarrow a_n = a_n^{(p)} + a_n^{(h)} = (4\,n^2 + 48\,n + 192)\,2^n + (b_1\,n + b_0)\,3^n$.

Să se afle soluția generală a recurenței liniare neomogene $a_n = a_{n-1} + n$ care satisface condiția inițială $a_1 = 1$.

Să se afle soluția generală a recurenței liniare neomogene $a_n = a_{n-1} + n$ care satisface condiția inițială $a_1 = 1$.

RĂSPUNS: Recurența liniară omogenă asociată lui a_n este $a_n = a_{n-1}$. Ecuația caracteristică este $r - 1 = 0$, deci soluția ei este de forma $a_n^{(h)} = c \cdot 1^n = c$ unde $c \in \mathbb{R}$.

Să se afle soluția generală a recurenței liniare neomogene $a_n = a_{n-1} + n$ care satisface condiția inițială $a_1 = 1$.

Răspuns: Recurența liniară omogenă asociată lui a_n este $a_n = a_{n-1}$.
Ecuația caracteristică este $r - 1 = 0$, deci soluția ei este de forma $a_n^{(h)} = c \cdot 1^n = c$ unde $c \in \mathbb{R}$.
Partea neliniară este $F(n) = Q(n)\, s^n$ unde $Q(n) = n$ și $s = 1$ este rădăcină cu multiplicitatea 1 a ecuației caracteristice a recurenței liniare omogene asociate $\Rightarrow a_n^{(p)} = n \cdot (A\, n + B) \cdot 1^n = A\, n^2 + B\, n$.

Să se afle soluția generală a recurenței liniare neomogene $a_n = a_{n-1} + n$ care satisface condiția inițială $a_1 = 1$.

RĂSPUNS: Recurența liniară omogenă asociată lui a_n este $a_n = a_{n-1}$.
Ecuația caracteristică este $r - 1 = 0$, deci soluția ei este de forma $a_n^{(h)} = c \cdot 1^n = c$ unde $c \in \mathbb{R}$.
Partea neliniară este $F(n) = Q(n)\, s^n$ unde $Q(n) = n$ și $s = 1$ este rădăcină cu multiplicitatea 1 a ecuației caracteristice a recurenței liniare omogene asociate $\Rightarrow a_n^{(p)} = n \cdot (A\, n + B) \cdot 1^n = A\, n^2 + B\, n$.
Pentru a afla A și B, ținem cont de faptul că $a_n^{(p)} = a_{n-1}^{(p)} + n$, adică

$$\begin{aligned} A\, n^2 + B\, n &= A\,(n-1)^2 + B\,(n-1) + n \\ &= A\,(n^2 - 2\,n + 1) + B\,(n-1) + n \end{aligned}$$

Aceasta implică $(2\,A - 1) \cdot n + (B - A) = 0$, deci $A = B = \frac{1}{2}$. Rezultă că $a_n^{(p)} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$.

Să se afle soluția generală a recurenței liniare neomogene $a_n = a_{n-1} + n$ care satisface condiția inițială $a_1 = 1$.

RĂSPUNS: Recurența liniară omogenă asociată lui a_n este $a_n = a_{n-1}$.
Ecuația caracteristică este $r - 1 = 0$, deci soluția ei este de forma $a_n^{(h)} = c \cdot 1^n = c$ unde $c \in \mathbb{R}$.
Partea neliniară este $F(n) = Q(n)\, s^n$ unde $Q(n) = n$ și $s = 1$ este rădăcină cu multiplicitatea 1 a ecuației caracteristice a recurenței liniare omogene asociate $\Rightarrow a_n^{(p)} = n \cdot (A\, n + B) \cdot 1^n = A\, n^2 + B\, n$.
Pentru a afla A și B, ținem cont de faptul că $a_n^{(p)} = a_{n-1}^{(p)} + n$, adică

$$\begin{aligned} A\, n^2 + B\, n &= A\,(n-1)^2 + B\,(n-1) + n \\ &= A\,(n^2 - 2\,n + 1) + B\,(n-1) + n \end{aligned}$$

Aceasta implică $(2\,A - 1) \cdot n + (B - A) = 0$, deci $A = B = \frac{1}{2}$. Rezultă că $a_n^{(p)} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$.
Rezultă că $a_n = a_n^{(p)} + a_n^{(h)} = c + \frac{n(n+1)}{2}$. Știm și că $1 = a_1 = c + \frac{1 \cdot 2}{2} = c + 1$, deci $c = 0$. Prin urmare $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Bibliografie

Capitolul 7 din

- Kenneth H. Rosen. *Discrete Mathematics and Its Applications.* Sixth Edition. McGraw-Hill, 2007.