1.5 Tehnici avansate de numărare

Multe probleme de numărare nu pot fi rezolvate doar cu tehnicile prezentate până acum: regula sumei, regula produsului, şi principiul incluziunii şi excluziunii. O astfel de problemă este: *În câte şiruri de n biţi nu apare subşirul 11?* Această problemă poate fi rezolvată gândind recursiv: fie a_n numărul şirurilor de n biţi în care nu apare 11. Vom vedea că se poate justifica că secvenţa $\{a_n\}$ satisface relaţia de recurenţă $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ şi condiţiile iniţiale $a_1 = 2$, $a_2 = 3$.

În general, o relaţie de recurenţă cu condiţii iniţiale pentru a_n poate fi folosită pentru a calcula progresiv toată secvenţa de numere $a_1, a_2, a_3, \ldots$ Mai mult, vom vedea că unele tipuri de relaţii de recurenţă permit găsirea unei formule de calcul explicit al lui a_n din n, fără a fi necesar să calculăm toate valorile precedente a_i, $i < n$.

În această secţiune argumentăm că relaţiile de recurenţă apar frecvent în modelarea problemelor de numărare. Sunt prezentate

1. Tehnici de raţionament combinatorial care facilitează modelarea problemelor de numărare cu relaţii de recurenţă.

2. Metode de rezolvare a două clase importante de relaţii de recurenţă: (a) recurenţe liniare omogene cu coeficienţi constanţi, şi (b) recurenţe liniare neomogene cu coeficienţi constanţi, în care termenul neliniar $F(n)$ este de forma $p(n) \cdot s^n$ cu p un polinom în n şi $s \in \mathbb{R}$.

1.5.1 Relaţii de recurenţă

O secvenţă este o structură de date discretă care se foloseşte pentru a reprezenta o listă ordonată de termeni. De exemplu, 2,3, 5,7,11 este o secvenţă de cinci numere, iar $1, 2, 4, 8, \ldots, 2^n, \ldots$ este o secvenţă infinită.

O **secvenţă** este o funcţie de la o mulţime de întregi (de obicei $\mathbb{N}$ sau mulţimea $\{1, 2, 3, \ldots\}$) la o mulţime S. Se folosesc notaţii precum a_n (o literă cu indicele n) pentru a denota valoarea funcţiei respective pentru întregul n. a_n este un **termen** al secvenţei respective.

Vom folosi notaţia $\{a_n\}_{n \geq k}$ pentru a ne referi la secvenţa de termeni

$$a_k, a_{k+1}, a_{k+2} \ldots$$

De exemplu, $\{a_n\}_{n \geq 1}$ este secvenţa $a_1, a_2, \ldots$ iar dacă $a_n = \frac{n}{n+1}$ atunci $\{a_n\}_{n \geq 1}$ este secvenţa de numere

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$$

O **relaţie de recurenţă** pentru secvenţa $\{a_n\}_{n\geq k}$ este o o ecuaţie care defineşte valoarea lui a_n în funcţie de unu sau mai mulţi termeni precedenţi, adică din mulţimea $\{a_k, a_{k-1}, \ldots, a_{n-1}\}$ pentru toţi termenii a_n cu $n \geq n_0$, unde $n_0 \geq k$ este un număr întreg.

Condiţiile iniţiale ale unei secvenţe definite cu o relaţie de recurenţă specifică termenii care preced primul termen definit de relaţia de recurenţă. O relaţie de recurenţă cu condiţii iniţiale permite calculul progresiv al tuturor termenilor din secvenţă.

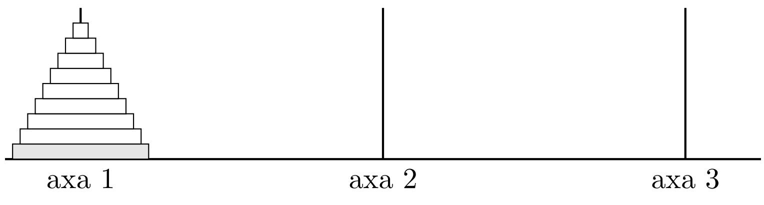
Exemplul 1. *Secvenţa lui Fibonacci* este $\{f_n\}_{n\geq 1}$ cu condiţiile iniţiale $f_1 = f_2 = 1$ şi relaţia de recurenţă $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ pentru $n > 2$. Orice termen f_n, $n > 3$ se poate calcula progresiv, De exemplu, termenul f_6 se poate calcula astfel:

$$\begin{aligned}
f_3 &= f_2 + f_1 = 1 + 1 = 2,\\
f_4 &= f_3 + f_2 = 2 + 1 = 3,\\
f_5 &= f_4 + f_3 = 3 + 2 = 5,\\
f_6 &= f_5 + f_4 = 5 + 3 = 8.
\end{aligned}$$
□

Probleme modelate cu relaţii de recurenţă

Numeroase probleme de numărare se pot rezolva descoperind o relaţie de recurenţă pentru numerele căutate. Descoperirea se poate face adesea cu regulile de bază ale raţionamenului combinatorial: regula sumei, regula produsului, şi principiul incluziunii şi excluziunii. Exemplele următoare ilustrează raţionamente de acest tip.

Exemplul 2 (Turnul din Hanoi). Turnul din Hanoi este un joc popular inventat în secolul XIX de către matematicianul francez Lucas, şi constă din trei axe verticale pe care se pun discuri de mărimi diferite. Iniţial, toate discurile sunt puse pe axa 1, în ordinea descrescătoare a mărimilor, cu discul cel mai mare jos, ca în figura de mai jos:

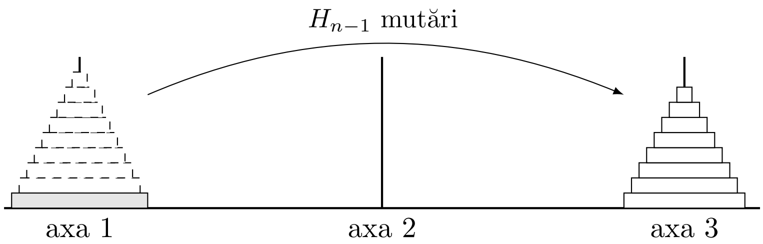


Jocul permite un singur tip de operaţie: să se mute discul cel mai de sus de pe o axă pe o altă axă, cu condiţia ca discul mutat să nu fie pus peste un disc mai mic. Se urmăreşte mutarea tuturor discurilor de pe axa 1 pe a axa

2. Care este numărul minim de mutări pentru a realiza acest obiectiv?

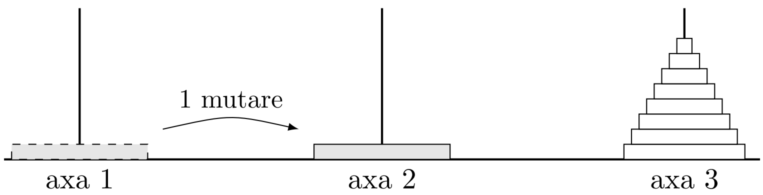
Fie H_n numărul minim de mutări care realizează mutarea tuturor discurilor de pe axa 1 pe axa 2. Este evident că $H_1 = 1$. Dacă $n > 1$, suntem constrânşi să procedăm în trei paşi:

1. Mutăm primele $n-1$ discuri de pe axa 1 pe axa 3 folosind axa 2 ca intermediar, şi obţinem

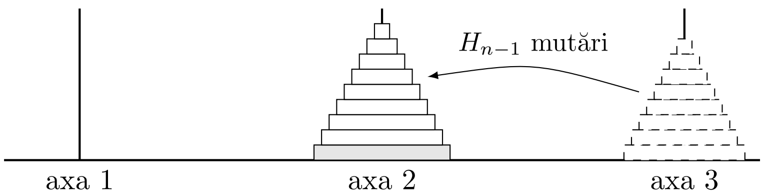


Numărul minim de mutări pentru pentru acest pas este H_{n-1}.

2. Mutăm singurul disc rămas de pe axa 1 pe axa 2, şi obţinem



3. Mutăm cele $n-1$ discuri de pe axa 3 pe axa 2 folosind axa 1 ca intermediar, şi obţinem



Numărul minim de mutări pentru pentru acest pas este H_{n-1}.

Însumând numerele de operaţii efectuate în cei trei paşi, obţinem relaţia de recurenţă $H_n = H_{n-1} + 1 + H_{n-1}$. Deci pentru secvenţa $\{H_n\}_{n\geq 1}$ obţinem relaţia de recurenţă $H_n = 2\,H_{n-1} + 1$ cu condiţia iniţială $H_1 = 1$. □

Exemplul 3. O colonie de bacterii se dublează în fiecare oră. Dacă colonia are iniţial 5 bacterii, câte bacterii va avea colonia după n ore?

RĂSPUNS: Fie b_n numărul de bacterii din colonie după n ore. Iniţial, adică după 0 ore, avem $b_0 = 5$ bacterii. Dacă $n > 0$ atunci $b_n = 2 \cdot b_{n-1}$. Deci pentru secvenţa $\{b_n\}_{n\geq 0}$ am obţinut relaţia de recurenţă $b_n = 2 \cdot b_{n-1}$ cu condiţia iniţială $b_0 = 5$. $\square$

Exemplul 4. Câte şiruri de n biţi nu conţin subşirul `11`?

RĂSPUNS: Fie secvenţa $\{a_n\}_{n\geq 1}$ unde a_n este numărul de şiruri de n biţi care nu conţin subşirul `11`. Este evident că $a_1 = 2$ şi $a_2 = 3$. Dacă $n > 2$, fie s un şir de n biţi care nu conţine subşirul `11`. Distingem două cazuri:

1. s începe cu bitul 0. În acest caz, s este un şir de forma

   `0` | orice şir de $n-1$ biţi în care nu apare `11` | Număr de posibilităţi: a_{n-1}

2. s începe cu bitul 1. În acest caz, s este un şir de forma

   `10` | orice şir de $n-2$ biţi în care nu apare `11` | Număr de posibilităţi: a_{n-2}

Conform regulii sumei, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Deci $\{a_n\}_{n\geq 1}$ satisface relaţia de recurenţă $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ cu condiţiile iniţiale $a_1 = 2$, $a_2 = 3$. $\square$

Exemplul 5. Câte şiruri de $n \geq 1$ litere din mulţimea $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$ nu conţin două caractere consecutive identice?

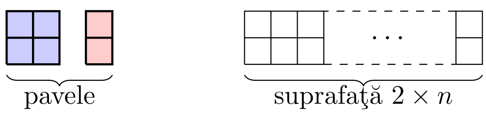
RĂSPUNS: Fie $\{a_n\}_{n\geq 1}$ secvenţa de termeni a_n care reprezintă numărul de şiruri de n caractere din $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$ fără caractere consecutive identice. Este evident că $a_1 = 3$. Dacă $n > 2$, fie s un şir de n caractere din $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$ fără caractere consecutive identice. Atunci $s = cs'$ unde

1. s' este un şir de $n-1$ caractere din $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$ fără caractere consecutive identice. Şirul s' poate fi selectat în a_{n-1} feluri.

2. $c \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\} - \{c_1\}$ unde c_1 este primul caracter al şirului s'. Caracterul c poate fi selectat în $3 - 1 = 2$ feluri.

Conform regulii produsului $a_n = 2 \cdot a_{n-1}$. Am obţinut relaţia de recurenţă $a_n = 2\, a_{n-1}$ cu condiţia iniţială $a_1 = 3$. $\square$

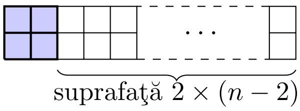
Exemplul 6. Fie $\{b_n\}_{n\geq 1}$ secvenţa în care b_n este numărul de feluri în care poate fi pavată suprafaţa $2 \times n$ ilustrată mai jos cu pavele 2×2 şi 2×1:



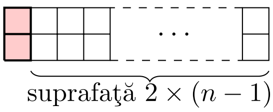
Care sunt valorile lui b_1, b_2 şi b_5?

RĂSPUNS: Putem presupune, fără să pierdem din generalitate, că pavarea se face de la stânga la dreapta. Pentru $n = 1$ putem pava doar cu pavela 2×1, deci $b_1 = 1$. Dacă $n = 2$, putem pava suprafaţa 2×2 în 2 feluri: cu două pavele 2×1 sau cu o pavelă 2×2, deci $b_2 = 2$.

Dacă $n > 2$, avem doar 2 posibilităţi: să începem cu o pavelă 2×2, sau să începem cu o pavelă 2×1. Dacă începem cu pavela 2×2



avem b_{n-2} posibilităţi să terminăm pavarea, iar dacă începem cu pavela 2×1



avem b_{n-1} posibilităţi să terminăm pavarea. Aplicând regula sumei, obţinem relaţia de recurenţă $b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$ cu condiţiile iniţiale $b_1 = 1$, $b_2 = 2$. Rezultă că

$$\begin{aligned} b_3 &= b_2 + b_1 = 2 + 1 = 3, \\ b_4 &= b_3 + b_2 = 3 + 2 = 5, \\ b_5 &= b_4 + b_3 = 5 + 3 = 8. \end{aligned}$$

□

Exemplul 7. Spunem că un şir de cifre zecimale este un *cuvânt de cod valid* dacă conţine cifra 0 de un număr par de ori. De exemplu `10987032` şi `123` sunt cuvinte de cod valide, dar `109870302` nu este. Fie a_n numărul de şiruri de n cifre zecimale care sunt cuvinte de cod valide. Găsiţi o relaţie de recurenţă pentru secvenţa $\{a_n\}_{n\geq 1}$.

RĂSPUNS. Fie A_n mulţimea cuvintelor de cod valide formate din n cifre zecimale, şi C_n mulţimea şirurilor de n cifre zecimale. Conform regulii produsului, $|C| = 10^n$. Se observă că $a_1 = 9$ fiindcă mulţimea cuvintelor de cod valide de lungime 1 are nouă elemente: $\mathtt{1,2,3,4,5,6,7,8,9}$. Dacă $n > 1$ şi s este un cuvânt de cod de cod valid cu n cifre zecimale, distingem 2 cazuri:

1. $s = 0s'$ cu $s' \in C_{n-1} - A_{n-1}$. Conform principiului incluziunii şi excluziunii, acest caz se poate realiza în $10^{n-1} - a_{n-1}$ feluri.

2. $s = cs'$ cu $c \in \{\mathtt{1,2,3,4,5,6,7,8,9}\}$ şi $s' \in A_{n-1}$. Conform regulii produsului, acest caz se poate realiza în $9\,a_{n-1}$ feluri.

Conform regulii sumei, obţinem relaţia de recurenţă $a_n = 10^{n-1} - a_{n-1} + 9\,a_{n-1} = 10^{n-1} + 8\,a_{n-1}$ cu condiţia iniţială $a_1 = 9$. □

Exemplul 8 (numere catalane). Fie C_n numărul de posibilităţi de a adăuga paranteze la produsul de numere $x_0 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n$ pentru a determina ordinea efectuării înmulţirilor. De exemplu, $C_3 = 5$ fiindcă sunt 5 posibilităţi de a adăuga paranteze la produsul $x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ pentru a determina ordinea efectuării înmulţirilor:

$$\begin{array}{lll} ((x_0 \cdot x_1) \cdot x_2) \cdot x_3 & (x_0 \cdot (x_1 \cdot x_2)) \cdot x_3 & (x_0 \cdot x_1) \cdot (x_2 \cdot x_3) \\ x_0 \cdot ((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3) & x_0 \cdot (x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3)) & \end{array}$$

Găsiţi o relaţie de recurenţă pentru calculul lui C_n. Ce valoare are C_4?

RĂSPUNS: Este evident că $C_0 = C_1 = 1$. $x_0 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n$ conţine n operaţii de înmulţire şi putem alege pe oricare din ele pentru a fi ultima efectuată, De exemplu, în $((x_0 \cdot x_1) \cdot x_2) \cdot x_3$ ultima înmulţire este a treia, iar în $(x_0 \cdot x_1) \cdot (x_2 \cdot x_3)$ ultima înmulţire este a doua. Deci sunt n posibilităţi de a alege ultima înmulţire efectuată. În cazul k (când ultima înmulţire efecturată este a k-a), avem de detrminat ordinea efectuării înmulţirilor pentru $x_0 \cdot \ldots \cdot x_{k-1}$ şi pentru $x_k \cdot \ldots \cdot x_n$:

$$(\underbrace{x_0 \cdot \ldots \cdot x_{k-1}}_{C_{k-1} \text{ posibilităţi}}) \cdot (\underbrace{x_k \cdot \ldots \cdot x_n}_{C_{n-k} \text{ posibilităţi}})$$

Conform regulii produsului, cazul k se poate realiza în $C_{k-1} \cdot C_{n-k}$ feluri, Conform regulii sumei, pentru cele n cazuri rezultă relaţia de recurenţă

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1} \cdot C_{n-k}$$

cu condiţiile iniţiale $C_0 = 1$ şi $C_1 = 1$. Cu această recurenţă putem calcula

$$\begin{aligned} C_2 &= C_0 \cdot C_1 + C_1 \cdot C_0 = 2, \\ C_3 &= C_0 \cdot C_2 + C_1 \cdot C_1 + C_2 \cdot C_0 = 2 + 1 + 2 = 5, \\ C_4 &= C_0 \cdot C_3 + C_1 \cdot C_2 + C_2 \cdot C_1 + C_3 \cdot C_0 = 5 + 2 + 2 + 5 = 14. \end{aligned}$$ □

Exerciţiul 9. Presupunem că avem bancnote de 1 leu, 3 lei şi 5 lei.

1. Folosiţi un raţionament combinatorial ca să aflaţi în câte feluri poate fi plătită suma de n lei cu bancnote de acest fel.
2. În câte feluri se pot plăti 12 lei cu bancnote de 2, 3 şi 5 lei?

RĂSPUNS:

1. Fie a_n numărul de posibilităţi de a plăti n lei cu bancnote de 2 lei; b_n numărul de posibilităţi de a plăti n lei cu bancnote de 2 sau 3 lei; şi c_n numărul de posibilităţi de a plăti n lei cu bancnote de 2, 3 şi 5 lei.

   Ni se cere să găsim o formulă de calcul pentru c_n. Observăm că

- $a_n = \begin{cases} 1 & \text{dacă } n \text{ este multiplu de 2 (inclusiv 0),} \\ 0 & \text{în caz contrar.} \end{cases}$
- Pentru calculul lui b_n distingem 2 cazuri:
  (a) Folosim o bancnotă de 3 lei. Acest caz este posibil doar dacă $n \geq 3$, şi mai rămăn de plătit $n-3$ lei în unul din b_{n-3} feluri.
  (b) Nu folosim bancnote de 3 lei, deci folosim doar banncnote de 2 lei şi putem face plata în a_n feluri.

  Conform regulii sumei

$$b_n = \begin{cases} a_n & \text{dacă } n < 3, \\ a_n + b_{n-3} & \text{dacă } n \geq 3. \end{cases}$$

- Şi pentru calculul lui c_n distingem 2 cazuri:
  (a) Folosim o bancnotă de 5 lei. Acest caz este posibil doar dacă $n \geq 5$, şi mai rămăn de plătit $n-5$ lei în unul din c_{n-3} feluri.
  (b) Nu folosim bancnote de 5 lei, deci folosim doar banncnote de 2 şi 3 lei şi putem face plata în b_n feluri.

  Conform regulii sumei

$$c_n = \begin{cases} b_n & \text{dacă } n < 5, \\ b_n + c_{n-5} & \text{dacă } n \geq 5. \end{cases}$$

2. $$\begin{aligned} c_{12} &= b_{12} + c_7 = (a_{12} + b_9) + (b_7 + c_2) = 1 + b_9 + b_7 + b_2 \\ &= 1 + (a_9 + b_6) + (a_7 + b_4) + a_2 = 2 + (a_3 + b_3) + (a_4 + b_1) \\ &= 2 + (0 + a_3 + b_0) + (1 + a_1) = 2 + a_0 + 1 = 4. \end{aligned}$$

□

Formule închise

O **soluţie** pentru o relaţie de recurenţă cu condiţii iniţiale a unei secvenţe $\{a_n\}_{n \geq k}$ este o formulă explicită a lui a_n în funcţie de n care satisface condiţiile iniţiale şi relaţia de recurenţă. O astfel de soluţie se numeşte **formulă închisă** a relaţiei de recurenţă.

De exemplu, $a_n = 3 \cdot n$ pentru toţi $n \in \mathbb{N}$ este o formulă închisă pentru relaţia de recurenţă cu condiţiile iniţiale

$$a_0 = 0, \ a_1 = 3, \ a_n = 2 \cdot a_{n-1} - a_{n-2} \text{ dacă } n > 1$$

fiindcă

▶ $3 \cdot 0 = 0 = a_0$, $3 \cdot 1 = 3 = a_1$, deci condiţiile iniţiale sunt satisfăcute de formula închisă.

▶ dacă înlocuim a_n cu $3 \cdot n$ în relaţia de recurenţă obţinem $2 \cdot a_{n-1} - a_{n-2} = 2 \cdot 3 \cdot (n-1) - 3 \cdot (n-2) = 3 \cdot n = a_n$, deci formula închisă satisface şi relaţia de recurenţă.

De obicei, formulele închise permit un calcul mult mai rapid al lui a_n decât calculul progresiv al tuturor valorilor a_k, $k \leq n$ cu relaţia de recurenţă. De exemplu, calculul lui a_n din secvenţa $\{a_n\}_{n \geq 0}$ definită de relaţia de recurenţă

$$a_0 = 0,\ a_1 = 3,\ a_n = 2 \cdot a_{n-1} - a_{n-2} \text{ dacă } n > 1$$

necesită

- $n-2$ înmulţiri şi $n-2$ scăderi dacă se calculează progresiv

$$a_3 = 2 \cdot a_2 - a_1, \ldots, a_n = 2 \cdot a_{n-1} - a_{n-2}.$$

- O singură înmulţire dacă se foloseşte formula închisă $a_n = 3 \cdot n$.

Din acest motiv, este important să învăţăm metode de rezolvare a relaţiilor de recurenţă cu condiţii iniţiale.

Uneori, o formulă închisă poate fi ghicită după ce se calculează câţiva termeni ai secvenţei. De exemplu, dacă calculăm termenii H_3, H_4, H_5 ai secvenţei $\{H_n\}_{n \geq 1}$ pentru turnul din Hanoi, definită de $H_1 = 1$ şi $H_n = 2 \cdot H_{n-1} + 1$ dacă $n > 1$, observăm că

$$\begin{aligned} H_2 &= 2 \cdot H_1 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3 = 2^2 - 1, \\ H_3 &= 2 \cdot H_2 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7 = 2^3 - 1, \\ H_4 &= 2 \cdot H_3 + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15 = 2^4 - 1 \end{aligned}$$

şi putem ghici că $H_n = 2^n - 1$. Apoi putem verifica dacă formula ghicită este soluţie a relaţiei de recurenţă şi a condiţiilor iniţiale.

Această metodă de rezolvare are dezavantajul că se bazează pe capacitatea de a ghici o soluţie. Din fericire, există clase importante de relaţii de recurenţă pe care ştim cum să le rezolvăm fără a trebui să ghicim.

În restul acestei subsecţiuni sunt prezentate metodele de rezolvare pentru două clase importante de relaţii de recurenţă: (1) relaţii de recurenţă liniară omogenă şi (2) relaţii de recurenţă liniară neomogenă. Pentru mai multe detalii despre metodele de rezolvare a relaţiilor de recurenţă liniară, recomandăm să se citească secţiunea 8.2 din [10].

Rezolvarea relaţiilor de recurenţă liniară omogenă

O *relaţie de recurenţă liniară omogenă de gradul k cu coeficienţi constanţi* este o relaţie de recurenţă de forma

$$a_n = c_1\, a_{n-1} + c_2\, a_{n-2} + \ldots + c_k\, a_{n-k} \tag{1.19}$$

cu $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ şi $c_k \neq 0$

Relaţia de recurenţă este **liniară** fiindcă a_n este o sumă de produse de termeni precedenţi înmulţiţi cu coeficienţi care sunt funcţii de n, la care se poate aduna un coeficient care este o funcţie de n. Recurenţa este **omogenă** fiindcă nu conţine termeni care să nu fie multipli de termeni precedenţi. **Gradul** recurenţei este k atunci când a_{n-k} este termenul cu indicele cel mai mic de care depinde valoarea lui a_n. Recurenţa are **coeficienţi constanţi** fiindcă toţi coeficienţii termenilor precedenţi sunt numere reale.

De exemplu $a_n = 3\,a_{n-1} - 7\,a_{n-2}$ este o relaţie de recurenţă liniară omogenă cu coeficienţi constanţi, dar $a_n = 2\,a_{n-1} + a_{n-2}^2$ nu este liniară, iar $a_n = a_{n-1} + 1$ nu este omogenă.

Se observă uşor că, pentru a putea calcula termenii unei secvenţe $\{a_n\}_{n\geq 0}$ definită de relaţia de recurenţă (1.19), trebuie să cunoaştem k condiţii iniţiale:

$$a_0 = C_0, a_1 = C_1, \ldots, a_{k-1} = C_{k-1}.$$

Acest tip de relaţii de recurenţă este studiat din două motive:

1. apare frecvent în modelarea problemelor, şi
2. se poate rezolva uşor.

Ecuaţia caracteristică a relaţiei de recurenţă (1.19) este

$$r^k - c_1\, r^{k-1} - \ldots - c_k = 0. \tag{1.20}$$

Fie $r_1, \ldots, r_t$ rădăcinile distincte ale ecuaţiei caracteristice

$$r^k - c_1\, r^{k-1} - \ldots - c_k = 0$$

a unei relaţii de recurenţă liniară omogenă cu coeficienţi constanţi pentru secvenţa $\{a_n\}_{n\geq 0}$ şi $m_1, m_2, \ldots, m_t$ multiplicităţile acestora. Orice soluţie a acestei relaţii de recurenţă este de forma

$$a_n = p_1(n)\, r_1^n + p_2(n)\, r_2^n + \ldots + p_t(n)\, r_t^n$$

unde, pentru $1 \leq i \leq t$, $p_i(n)$ este un polinom în n cu coeficienţi reali, de grad mai mic ca m_i.

Exemplul 10. Să se rezolve relaţia de recurenţă $a_n = 3\,a_{n-1} - 2\,a_{n-2}$ cu condiţiile iniţiale $a_0 = 7$, $a_1 = 5$.

RĂSPUNS: Aceasta este o relaţie de recurenţă liniară omogenă cu coeficienţi constanţi. Ecuaţia caracteristică a acesteia este $r^2 - 3\,r + 2 = 0$, care are rădăcinile distincte $r_1 = (3 - \sqrt{1})/2 = 1$ şi $r_2 = (3 + \sqrt{1})/2 = 2$ cu multiplicităţile $m_1 = 1$, $m_2 = 1$. Rezultă că soluţia acestei recurenţe este $a_n = p_1(n)\,r_1^n + p_2(n)\,r_2^n$ cu $p_1(n), p_2(n)$ polinoame de grad $1 - 1 = 0$ (adică constante), deci $a_n = a \cdot 1^n + b \cdot 2^n = a + b \cdot 2^n$ unde $a, b \in \mathbb{R}$. Valorile coeficienţilor a, b sunt determinate de condiţiile iniţiale:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= a + b = 7, \\
a_1 &= a + 2 \cdot b = 5
\end{aligned}
$$

de unde rezultă $a = 9, b = -2$. Deci $a_n = 9 - 2^{n+1}$ pentru toţi $n \in \mathbb{N}$. □

Exemplul 11. Să se rezolve relaţia de recurenţă

$$a_n = \frac{11}{2}\,a_{n-1} - 6\,a_{n-2} - \frac{9}{2}\,a_{n-3}.$$

RĂSPUNS: Aceasta este o relaţie de recurenţă liniară omogenă cu coeficienţi constanţi. Ecuaţia caracteristică a acesteia este

$$r^3 - \frac{11}{2}\,r^2 + 6\,r + \frac{9}{2} = 0 \text{ sau } 2\,r^3 - 11\,r^2 + 12\,r + 9 = 0.$$

Se observă că $r_1 = 3$ este rădăcină a acestei ecuaţii fiindcă

$$2 \cdot 3^3 - 11 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 + 9 = 54 - 99 + 36 + 9 = 0.$$

Deci $2\,r^3 - 11\,r^2 + 12\,r + 9 = (r - 3) \cdot p(r)$ unde $p(r)$ este un polinom de gradul 2 care se obţine împărţind $2\,r^3 - 11\,r^2 + 12\,r + 9$ la $r - 3$:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2\,r^3 & -11\,r^2 & +12\,r & +9 & r-3 \\ \cline{5-5}
2\,r^3 & -6\,r^2 & & & 2\,r^2-5\,r-3 \\ \cline{1-2}
/ & -5\,r^2 & +12r & +9 & \\
 & -5\,r^2 & +15\,r & & \\ \cline{2-3}
 & / & -3\,r^2 & +9 & \\
 & & -3\,r^2 & +9 & \\ \cline{3-4}
 & & / & / &
\end{array}
$$

Rezultă că $p(r) = 2\,r^2 - 5\,r - 3$. Rădăcinile polinomului $p(r) = 0$ sunt $(5 \pm 7)/4$, adică $-1/2$ şi 3. Deci ecuaţia caracteristică are rădăcinile $r_1 = 3$

cu multiplicitatea $m_1 = 2$, şi $r_2 = -1/2$ cu multiplicitatea $m_2 = 1$. Prin urmare, soluţia acestei recurenţe este

$a_n = (a \cdot n + b) \cdot 3^n + c \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^n$ unde $a, b, c \in \mathbb{R}$. □

Singurele ecuaţii pentru care există formule generale de calcul algebric[2] al rădăcinilor doar sunt cele de grad $n \leq 4$. De exemplu, formulele de calcul algebric al rădăcinilor ecuaţiei $a\,r^2 + b\,r + c = 0$ cu $a, b, c \in \mathbb{R}$ şi $a \neq 0$ sunt

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}.$$

Pentru ecuaţiile de gradul 3 şi 4, formulele algebrice sunt mai complicate, iar pentru ecuaţii de grad mai mare ca 4 nu există.

Adesea avem de rezolvat ecuaţii de forma $a_n\,r^n + a_{n-1}\,r^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$ cu $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$, $a_n, a_0 \neq 0$ şi $\gcd(a_1, \ldots, a_n)$. Dacă această ecuaţie are o rădăcină raţională, o putem găsi uşor cu ajutorul următorului criteriu:

Criteriul de test de rădăcină raţională. Se consideră ecuaţia

$$a_n\,r^n + a_{n-1}\,r^{n-1} + \ldots + a_0 = 0 \tag{1.21}$$

cu $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$, $\gcd(a_1, \ldots, a_n)$ şi $a_1, a_n \neq 0$. Orice rădăcină raţională a lui (1.21) este de forma p/q cu $p, q \in \mathbb{Z}$, $\gcd(p, q) = 1$, p este un factor al lui a_0, iar q este un factor pozitiv al lui a_n.

Exemplul 12. Să se determine toate rădăcinile raţionale ale ecuaţiei

$$70\,r^3 - 385\,r^2 + 420\,r - 315 = 0.$$

Rezolvare: $\gcd(70 - 315) = 35$, deci dacă împărţim cu 35 toţi coeficienţii ecuaţiei date obţinem ecuaţia $2\,r^3 - 11\,r^2 + 12\,r + 9 = 0$ care satisface criteriul de test de rădăcină raţională. Factorii pozitivi ai lui 2 sunt sunt 1 şi 2, iar factorii lui 9 sunt $-9, -3, -1, 1, 3$ şi 9. Rezultă că orice rădăcină raţională a ecuaţiei date este în mulţimea

$$\left\{\frac{a}{b} \mid a \in \{-9, -3, -1, 1, 3, 9\}, b \in \{1, 2\}\right\} = \left\{\pm 1, \pm 3, \pm 9, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{9}{2}\right\}.$$

După verificarea tuturor celor 12 posibilităţi rezultă că singurele rădăcini raţionale sunt $r_1 = 3$ şi $r_2 = -1/2$. □

[2] Adică, aplicând doar adunări, scăderi, înmulţiri şi extrageri de radicali de ordin cel mult n asupra coeficienţilor ecuaţiei.

Unele relaţii de recurenţă nu sunt liniare omogene dar se pot reduce la relaţii de recurenţă liniară omogenă cu coeficienţi constanţi. Următoarele două exemple ilustrează astfel de situaţii.

Exemplul 13. Calculaţi soluţia relaţiei de recurenţă $a_n = 3\,a_{n-1} - 4$ cu $a_0 = 1$. Ce valoare are a_{20}?

RĂSPUNS: Aceasta nu este o relaţie de recurenţă liniară omogenă, dar se poate transforma uşor în o relaţie de recurenţă liniară omogenă de gradul 2 cu coeficienţi constanţi dacă observăm că $a_1 = a_0 - 4 = -1$ şi

$$\left.\begin{array}{rl} a_n = & 3\,a_{n-1} - 4 \\ a_{n-1} = & 3\,a_{n-2} - 4 \end{array}\right\} \Rightarrow a_n - a_{n-1} = 3\,a_{n-1} - 3\,a_{n-2}$$

de unde rezultă că $a_n - 4\,a_{n-1} + 3\,a_{n-2} = 0$. Ecuaţia caracteristică este $r^2 - 4\,r + 3 = 0$ cu rădăcinile $r_1 = 1$ cu multiplicitatea $m_1 = 1$, şi $r_2 = 3$ cu multiplicitatea 1. Deci $a_n = a + b \cdot 3^n$ cu $a, b \in \mathbb{R}$. Din condiţiile iniţiale $a_0 = 1$, $a_2 = -1$ rezultă $a + b = 1$ şi $a + 3\,b = -1$, deci $a = 2$, $b = -1$.

În concluzie, $a_n = 2 - 3^n$ şi $a_{20} = 2 - 3^{20} = -3486784399$. □

Exemplul 14*. Calculaţi soluţiile relaţiilor de recurenţă pentru secvenţele $\{a_n\}_{n\geq 0}$ şi $\{b_n\}_{n\geq 0}$ dacă $a_n = a_{n-1} + 2\,b_{n-1}$ şi $b_n = 2\,a_{n-1} + 3\,b_{n-1}$.

RĂSPUNS: Mai întâi eliminăm a_{n-1} ca să obţinem o recurenţă pentru b_n, apoi eliminăm b_{n-1} ca să obţinem o recurenţă pentru a_n:

$$\begin{array}{rrl} a_n = & a_{n-1} + 2\,b_{n-1} & |\cdot(-2) \\ b_n = & 2\,a_{n-1} + 3\,b_{n-1} & \\ \hline -2\,a_n + b_n = & -b_{n-1} & \Rightarrow a_n = (b_n + b_{n-1})/2 \\ a_n = & a_{n-1} + 2\,b_{n-1} & |\cdot(-3) \\ b_n = & 2\,a_{n-1} + 3\,b_{n-1} & |\cdot 2 \\ \hline -3\,a_n + 2\,b_n = & a_{n-1} & \Rightarrow b_n = (3\,a_n + a_{n-1})/2 \end{array}$$

de unde rezultă relaţiile de recurenţă liniară omogenă de gradul 2

$$\begin{cases} b_n = 2\,(b_{n-1} + b_{n-2})/2 + 3\,b_{n-1} & = 4\,b_{n-1} + b_{n-2}, \\ a_n = a_{n-1} + 2\,(3\,a_{n-1} + a_{n-2})/2 & = 4\,a_{n-1} + a_{n-2}. \end{cases}$$

Ambele relaţii de recurenţă au ecuaţia caracteristică $r^2 - 4\,r - 1 = 0$ cu rădăcinile $r_1 = 2 + \sqrt{5}$ şi $r_2 = 2 - \sqrt{5}$, deci

$$a_n = a\,r_1^n + b\,r_2^n,$$
$$b_n = c\,r_1^n + d\,r_2^n$$

cu $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Deasemenea, $a_n = a_{n-1} + 2\, b_{n-1}$ implică

$$(a\, r_1 - a - 2\, c)\, r_1^{n-1} + (b\, r_2 - b - 2\, d)\, r_2^{n-1} = 0$$

pentru toţi $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, deci $a\, r_1 - a - 2\, c = 0$ şi $b\, r_2 - b - 2\, d = 0$. Deducem că $c = (r_1 - 1) \cdot a/2$ şi $d = (r_2 - 1) \cdot b/2$. În concluzie, soluţiile relaţiilor de recurenţă pentru secvenţele $\{a_n\}_{n \geq 0}$ şi $\{b_n\}_{n \geq 0}$ sunt

$$\begin{aligned} a_n &= a\, r_1^n + b\, r_2^n, \\ b_n &= \frac{r_1 - 1}{2}\, a\, r_1^n + \frac{r_2 - 1}{2}\, b\, r_2^n \end{aligned}$$

cu $a, b \in \mathbb{R}$. □

Rezolvarea relaţiilor de recurenţă liniară neomogenă

O *relaţie de recurenţă liniară neomogenă de gradul k cu coeficienţi constanţi* este o relaţie de recurenţă de forma

$$a_n = c_1\, a_{n-1} + c_2\, a_{n-2} + \ldots + c_k\, a_{n-k} + F(n) \tag{1.22}$$

cu $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$, $c_k \neq 0$, şi $F(n)$ o funcţie diferită de 0 care depinde doar de n. Relaţia de recurenţă

$$a_n = c_1\, a_{n-1} + c_2\, a_{n-2} + \ldots + c_k\, a_{n-k}$$

se numeşe *relaţie de recurenţă omogenă asociată* recurenţei (1.22).

Relaţiile de recurenţă liniară neomogenă cu coeficienţi constanţi au două proprietăţi importante:

1. Dacă $a_n^{(p)}$ este o soluţie particulară a recurenţei (1.22) atunci orice altă soluţie a recurenţei (1.22) este de forma $a_n = a_n^{(p)} + a_n^{(h)}$ unde $a_n^{(h)}$ este soluţie a relaţiei de recurenţă omogene asociate.

2. În general, o soluţie particulară $a_n^{(p)}$ pentru recurenţa (1.22) este greu de găsit, dar se poate obţine uşor când $F(n)$ este de forma $p(n) \cdot s^n$ cu $s \in \mathbb{R}$ şi $p(n)$ un polinom în n cu coeficienţi reali.

Teorema următoare ne dă un criteriu simplu de calcul al unei soluţii particulare $a_n^{(p)}$ când funcţia $F(n)$ are forma specială descrisă mai sus.

Teoremă. Fie relaţia de recurenţă liniară neomogenă

$$a_n = c_1\, a_{n-1} + c_2\, a_{n-2} + \ldots + c_k\, a_{n-k} + F(n)$$

cu $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$, şi $F(n) = p(n) \cdot s^n$ unde $p(n)$ este un polinom de gradul t în n cu coeficienţi reali şi $s \in \mathbb{R}$.

1. Dacă s nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice a relaţiei de recurenţă omogenă asociate, adică $s^n \neq c_1\, s^{n-1} + c_2\, s^{n-1} + \ldots + c_k$, atunci există o soluţie particulară a acestei recurenţe, de forma $q(n) \cdot s^n$ cu $q(n)$ un polinom de grad $\leq t$ cu coeficienţi reali.

2. Dacă s este rădăcină cu multiplicitatea $m > 0$ a ecuaţiei caracteristice a relaţiei de recurenţă omogenă asociate, atunci există o soluţie particulară a acestei recurenţe, de forma $n^m \cdot q(n) \cdot s^n$ cu $q(n)$ un polinom de grad $\leq t$ cu coeficienţi reali.

Exemplul 15. Să se determine forma generală a unei soluţii a relaţiei de recurenţă $a_n = 6\, a_{n-1} - 12\, a_{n-2} + 8\, a_{n-3} + F(n)$ dacă

(a) $F(n) = n \cdot 2^n$ (b) $F(n) = n^3 \cdot (-2)^n$

Răspuns: Aceasta este o relaţie de recurenţă liniară neomogenă de gradul 3 cu coeficienţi constanţi. Ecuaţia caracteristică $r^3 - 6\,r^2 + 12\,r - 8 = (r-2)^3 = 0$, deci soluţia generală a a relaţiei de recurenţă omogene asociate este $a_n^{(h)} = (e\,n^2 + f\,n + g)\,2^n$ cu $e, f, g \in \mathbb{R}$.

(a) $F(n) = n \cdot 2^n = p(n) \cdot s^n$ unde $p(n) = n$ şi $s = 2$. Numărul s este rădăcină cu multiplicitatea 3 a ecuaţiei caracteristice. În acest caz există o soluţie particulară $a_n^{(p)} = n^3 \cdot (a\,n + b) \cdot 2^n$ cu $a, b \in \mathbb{R}$. Rezultă că putem înlocui a_n cu $n^3 \cdot (a\,n + b) \cdot 2^n$ în relaţia de recurenţă, deci are loc egalitatea

$$\begin{aligned} n^3 \cdot (a\,n + b) \cdot 2^n = 6\,(n-1)^3 \cdot (a\,(n-1) + b) \cdot 2^{n-1} \\ - 12\,(n-2)^3 \cdot (a\,(n-2) + b) \cdot 2^{n-2} \\ + 8\,(n-3)^3 \cdot (a\,(n-3) + b) \cdot 2^{n-3} + n\,2^n \end{aligned}$$

După ce împărţim ecuaţia cu 2^n obţinem

$$\begin{aligned} a\,n^4 + b\,n^3 &= 3\,(n-1)^3(a\,n + b - a) - 3\,(n-2)^3(a\,n + b - 2\,a) \\ &\quad + (n-3)^3(a\,n + b - 3\,a) + n \\ &= a\,n^4 + b\,n^3 + (1 - 24\,a)\,n + 36\,a - 6\,b. \end{aligned}$$

Rezultă $1 - 24\,a = 0$ şi $36\,a - 6\,b = 0$, adică $a = 1/24$ şi $b = 1/4$. Deci

$$\begin{aligned} a_n^{(p)} &= n^3\left(\frac{n}{24}+\frac{1}{4}\right)2^n && \text{este o soluţie particulară, iar} \\ a_n &= a_n^{(p)} + a_n^{(h)} && \text{este soluţia generală.} \end{aligned}$$

(b) $F(n) = n^3 \cdot (-2)^n = p(n) \cdot s^n$ unde $p(n) = n^3$ şi $s = -2$. Numărul -2 nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice. În acest caz există o soluţie particulară $a_n^{(p)} = (a\,n^3 + b\,n^2 + c\,n + d) \cdot (-2)^n$ cu $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Rezultă că putem înlocui a_n cu $(a\,n^3 + b\,n^2 + c\,n + d) \cdot (-2)^n$ în relaţia de recurenţă, deci are loc egalitatea

$$\begin{aligned} &(a\,n^3 + b\,n^2 + c\,n + d) \cdot (-2)^n = \\ &\quad 6\,(a\,(n-1)^3 + b\,(n-1)^2 + c\,(n-1) + d)\,(-2)^{n-1} \\ &\quad - 12\,(a\,(n-2)^3 + b\,(n-2)^2 + c\,(n-2) + d)\,(-2)^{n-2} \\ &\quad + 8\,(a\,(n-3)^3 + b\,(n-3)^2 + c\,(n-3) + d)\,(-2)^{n-3} + n^3 \cdot (-2)^n \end{aligned}$$

După ce împărţim ecuaţia cu $(-2)^n$, obţinem

$$\begin{aligned} &a\,n^3 + b\,n^3 + c\,n + d = \\ &\quad - 3\,(a\,(n-1)^3 + b\,(n-1)^2 + c\,(n-1) + d) \\ &\quad - 3\,(a\,(n-2)^3 + b\,(n-2)^2 + c\,(n-2) + d) \\ &\quad - (a\,(n-3)^3 + b\,(n-3)^2 + c\,(n-3) + d) + n^3 = \\ &(1 - 7\,a)\,n^3 + (36\,a - 7\,b)\,n^2 + (-72\,a + 24\,b - 7\,c)\,n \\ &\quad + (54\,a - 24\,b + 12\,c - 7d). \end{aligned}$$

Rezultă

$$\left\{ \begin{aligned} 1 - 7\,a &= a \\ 36\,a - 7\,b &= b \\ -72\,a + 24\,b - 7\,c &= c \\ 54\,a - 24\,b + 12\,c - 7d &= d \end{aligned} \right. \Rightarrow a = \frac{1}{8}, b = c = \frac{9}{16}, d = 0.$$

Deci

$$\begin{aligned} a_n^{(p)} &= \left(\frac{n^3}{8} + \frac{9\,n^2}{16} + \frac{9\,n}{16}\right)(-2)^n && \text{este o soluţie particulară, iar} \\ a_n &= a_n^{(p)} + a_n^{(h)} && \text{este soluţia generală.} \end{aligned}$$

□

Exemplul 16. Să se calculeze o formulă închisă pentru secvenţa $\{a_n\}_{n\geq 0}$ unde $a_n = \sum_{k=0}^{n} k^3$.

RĂSPUNS. Din $a_n = \sum_{k=0}^{n} k^3$ rezultă

$$a_0 = \sum_{k=0}^{0} k^3 = 0^3 = 0 \text{ şi } a_n = \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k\right) + n^3 = a_{n-1} + n^3 \quad \text{dacă } n > 0$$

Ecuaţia caracteristică a recurenţei omogene asociate este $r - 1 = 0$, care are rădăcina $r_1 = 1$ cu multiplicitatea $m_1 = 1$, iar termenul liber al recurenţei este $F(n) = n^3 = p(n) \cdot 1^n$ cu $p(n) = n^3$.

Rezultă că

1. soluţia generală a a relaţiei de recurenţă omogene asociate este $a_n^{(h)} = a \cdot 1^n = a$ cu $a \in \mathbb{R}$,

2. o soluţie particulară este de forma $a_n^{(p)} = n\,(b\,n^3 + c\,n^2 + d\,n + e)\,1^n$ cu $b, c, d, e \in \mathbb{R}$. Rezultă că putem înlocui a_n cu $n\,(b\,n^3 + c\,n^2 + d\,n + e)$ în relaţia de recurenţă $a_n = a_{n-1} + n^3$, deci are loc egalitatea

$$\begin{aligned} & b\,n^4 + c\,n^3 + d\,n^2 + e\,n \\ &\quad = b\,(n-1)^4 + c\,(n-1)^3 + d\,n-1)^2 + e\,(n-1)^2 + n^3 \\ &\quad = b\,n^4 + (1 - 4\,b + c)\,n^3 + (6\,b - 3\,c + d)\,n^2 \\ &\qquad + (-4\,b + 3\,c - 2\,d + e)\,n + (b - c + d - e). \end{aligned}$$

Rezultă

$$\left\{\begin{array}{rl} 1 - 4\,b + c & = b \\ 6\,b - 3\,c + d & = c \\ -4\,b + 3\,c - 2\,d + e & = d \\ b - c + d - e & = e \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} b & = 1/4 \\ c & = 1/2 \\ d & = 1/4 \\ e & = 0. \end{array}\right.$$

Soluţia generală este

$$a_n = a_n^{(p)} + a_n^{(h)} = a + n\left(\frac{1}{4}\,n^3 + \frac{1}{2}\,n^2 + \frac{1}{4}\,n\right) = a + \frac{1}{4}\,n^2(n+1)^2$$

iar condiţia iniţială $a_0 = 0$ implică $a = 0$. Deci

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{1}{4}\,n^2(n+1)^2.$$

$\square$

1.5.2 Concluzii

- Regulile de bază ale raţionamentului combinatorial în teoria numărării sunt:
  - regula bijecţiei,
  - regula sumei,
  - regula produsului

  şi principiul incluziunii şi excluziunii.

- Adesea, răspunsul produs de un raţionament combinatorial este o relaţie de recurenţă. O relaţie de recurenţă permite calculul progresiv al unei secvenţe de termeni pornind de la nişte valori iniţiale, până când se obţine termenul dorit.

- Numeroase clase de relaţii de recurenţă pot fi rezolvate. O soluţie a unei relaţii de recurenţă pentru o secvenţă de termeni $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ este o formulă $a_n = F(n)$ unde $F(n)$ este o expresie care depinde doar de n şi permite calculul direct al lui a_n pentru toţi $n \geq n_0$, fără a fi nevoiţi să calculăm toţi termenii precedenţi $a_{n_0}, a_{n_0+1}, \ldots, a_{n-1}$.

- Au fost prezentate metode de rezolvare pentru două clase largi de relaţii de recurenţă:
  1. relaţii de recurenţă liniară omogenă de gradul k cu coeficienţi constanţi,
  2. relaţii de recurenţă liniară neomogenă de gradul k cu coeficienţi constanţi, în care termenul neliniar $F(n)$ este de forma $p(n) \cdot s^n$ cu $p(n)$ un polinom în n şi $s \in \mathbb{R}$.

1.5.3 Exerciţii

1. Determinaţi o relaţie de recurenţă pentru calculul numărului de posibilităţi de a plăti n lei cu bancnote ipotetice de 1, 3, 5, 10, 25 şi 50 lei. Scrieţi un program care calculează acest număr. Ce valoare are acest număr pentru suma de 100 lei?

2. Un mesaj este o secvenţă finită de semnale de trei feluri care urmează imediat unul după altul: semnalul A durează 1 microsecundă, iar semnalele B şi C durează 2 microsecunde. Fie a_n numărul de mesaje diferite care durează n microsecunde.

(a) Să se găsească o relaţie de recurenţă cu condiţii iniţiale pentru calculul lui a_n.

(b) Câte semnale diferite durează 25 microsecunde?

3. Rezolvaţi următoarele relaţii de recurenţă împreună cu condiţiile lor iniţiale:

(a) $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_n = 5\,a_{n-1} - 6\,a_{n-2}$ dacă $n > 1$.

(b) $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_n = 4\,a_{n-1} - 4\,a_{n-2}$ dacă $n > 1$.

(c) $a_0 = 2$, $a_1 = 1$, $a_n = 7\,a_{n-1} - 10\,a_{n-2}$ dacă $n > 1$.

4. Secvenţa $\{f_n\}_{n\geq 0}$ a numerelor Fibonacci este definită de relaţia de recurenţă cu condiţiile iniţiale

$$f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ dacă } n > 1.$$

(a) Rezolvaţi această relaţie de recurenţă.

(b) Demonstraţi că f_n este întregul cel mai apropiat de numărul

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

5. Rezolvaţi relaţia de recurenţă $a_n = 2\,a_{n-1} + a_{n-2} - 2\,a_{n-3}$ cu condiţiile iniţiale $a_0 = 3$, $a_1 = 6$ şi $a_2 = 0$.

6. Calculaţi o formulă închisă pentru secvenţa $\{a_n\}_{n\geq 0}$ cu $a_n = \sum_{k=0}^{n} k$.

7. Calculaţi o formulă închisă pentru secvenţa $\{a_n\}_{n\geq 0}$ cu $a_n = \sum_{k=0}^{n} k^2$.

8. Rezolvaţi relaţiile de recurenţă

(a) $a_n = 5\,a_{n-1} - 6\,a_{n-2} + 7^n$.

(b) $a_n = 2\,a_{n-1} + 3 \cdot 2^n$.

(c) $a_n = 4\,a_{n-1} - 4\,a_{n-2} + (n+1)\,2^n$.

8*. Rezolvaţi relaţiile de recurenţă mutual recursive $a_n = 3\,a_{n-1} + 2\,b_{n-1}$, $b_n = a_{n-1} + 2\,b_{n-1}$ cu $a_0 = 1$ şi $b_0 = 2$.