Curs 3: Principiul porumbelului. Principiul incluziunii si excluziunii

Sunt 2 tipuri de aranjamente combinatoriale ale elementelor unei multimi finite:

- ordonate (sau permutări):
  1. r-permutări (fără repetiție):
     EXEMPLE: $\langle 1, 3, 2\rangle, \langle 3, 1, 2\rangle$
  2. r-permutări cu repetiție:
     EXEMPLE: $\langle 2, 2, 3\rangle, \langle 3, 3, 3\rangle$
- neordonate (sau combinări):
  1. r-combinări (fără repetiție):
     EXEMPLE: $\{1, 2, 4\}$, $\{2, 3, 4\}$
  2. r-combinări cu repetiție:
     EXEMPLE: $\{1, 1, 2\}$, $\{1, 3, 1\}$

Formule utile pentru $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$:

r-permutări	$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$
r-permutări cu repetiţie	n^r
r-permutări cu repetiţie în care a_1 apare de r_1 ori a_2 apare de r_2 ori $\ldots$ a_n apare de r_n ori (se observă că $r_1 + r_2 + \ldots + r_n = r$)	$\binom{r}{r_1, r_2, \ldots, r_n} = \frac{r!}{r_1! r_2! \cdot \ldots \cdot r_n!}$
r-combinări	$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$
combinări	2^n
r-combinări cu repetiţie	$\binom{r+n-1}{n-1} = \frac{(r+n-1)!}{r!(n-1)!}$

O ordonare a unui tip de aranjament combinatorial este o enumerare a tuturor aranjamentelor de acel tip.

Exemple

- ordonarea lexicografică a 3-combinărilor lui $\{a, b, c, d\}$:
  $\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$
- ordonarea lexicografică a submulțimilor lui $\{a, b, c\}$:
  $\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, c\}, \{b\}, \{b, c\}, \{c\}$
- ordonarea binară a submulțimilor lui $\{a, b, c\}$:
  $\emptyset, \{c\}, \{b\}, \{b, c\}, \{a\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}$
- ordonarea lexicografică a 2-combinărilor lui $\{a, b, c\}$:
  $\{a, a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, b\}, \{b, c\}, \{c, c\}$

O ordonare a unui tip de aranjament combinatorial este o enumerare a tuturor aranjamentelor de acel tip.

EXEMPLE

- ordonarea lexicografică a 3-combinărilor lui $\{a, b, c, d\}$:
  $\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$
- ordonarea lexicografică a submulțimilor lui $\{a, b, c\}$:
  $\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, c\}, \{b\}, \{b, c\}, \{c\}$
- ordonarea binară a submulțimilor lui $\{a, b, c\}$:
  $\emptyset, \{c\}, \{b\}, \{b, c\}, \{a\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}$
- ordonarea lexicografică a 2-combinărilor lui $\{a, b, c\}$:
  $\{a, a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, b\}, \{b, c\}, \{c, c\}$

Rangul unui aranjament în o anumită ordonare este poziția acelui aranjament în enumerarea respectivă (începând de la 0).

Au fost prezentate metode de

- **Ranking:** la ce poziție apare un aranjament în o enumerare?
- **Unranking:** Ce aranjament apare la on anumită poziție în o enumerare?
- **Enumerare:** Ce aranjament urmează după un aranjament în o enumerare?

Principiul porumbeilor (sau Principiul lui Dirichlet)

Fie n un număr întreg pozitiv.

- Dacă mai mult de n obiecte sunt distribuite în n containere, atunci un container trebuie să conțină cel puțin 2 obiecte.
- Generalizare: Dacă mai mult de $m \cdot n$ obiecte sunt distribuite în n containere, atunci un container trebuie să conțină cel puțin $m + 1$ obiecte.

Principiul porumbeilor (sau Principiul lui Dirichlet)

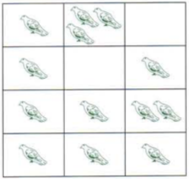
Fie n un număr întreg pozitiv.

- Dacă mai mult de n obiecte sunt distribuite în n containere, atunci un container trebuie să conțină cel puțin 2 obiecte.
- Generalizare: Dacă mai mult de $m \cdot n$ obiecte sunt distribuite în n containere, atunci un container trebuie să conțină cel puțin $m + 1$ obiecte.

Permite stabilirea existenței unei anumite configurații sau combinări în diverse situații.

EXEMPLU: 13 porumbei intră în 12 adăposturi.

- Numărul de adăposturi este mai mic decât numărul de porumbei $\Rightarrow$ cel puțin un adăpost va fi ocupat de cel puțin 2 porumbei.



1. Într-un grup de 367 studenți, cel puțin 2 studenți au aceeași zi de naștere.

   DEMONSTRAŢIE. Numărul de studenți este mai mare decât numărul de zile calendaristice. Conform pricipiului porumbeilor, cel puțin 2 studenți sunt născuți în aceeași zi calendaristică.

2. n pugiliști concurează într-un turneu care prevede un meci între fiecare pereche de pugiliști. Fiecare pugilist a pierdut cel puțin un meci. Atunci cel puțin 2 pugiliști au obținut același număr de victorii.

   DEMONSTRAŢIE. Sunt n pugiliști, și fiecare pugilist are între 0 și $n-2$ victorii. (Observați că nici un pugilist nu are $n-1$ victorii deoarece știm că fiecare a pierdut cel puțin un meci.) Conform principiului porumbeilor, cel puțin 2 pugiliști au același număr de victorii.

Definiție (Secvență monotonă)

O secvență $a_1, a_2, \ldots, a_n$ este

- crescătoare dacă $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$
- strict crescătoare dacă $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$
- descrescătoare dacă $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$
- strict descrescătoare dacă $a_1 > a_2 > \ldots > a_n$

- Fie secvența $3, 5, 8, 10, 6, 1, 9, 2, 7, 4.$
- Care sunt subsecvențele crescătoare de lungime maximă?

- Care sunt subsecvențele descrescătoare de lungime maximă?

Definiție (Secvență monotonă)

O secvență $a_1, a_2, \ldots, a_n$ este

- crescătoare dacă $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$
- strict crescătoare dacă $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$
- descrescătoare dacă $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$
- strict descrescătoare dacă $a_1 > a_2 > \ldots > a_n$

- Fie secvența $3, 5, 8, 10, 6, 1, 9, 2, 7, 4.$
- Care sunt subsecvențele crescătoare de lungime maximă?

$$(3, 5, 8, 10), (3, 5, 8, 9), (3, 5, 6, 7), (3, 5, 6, 9)$$

- Care sunt subsecvențele descrescătoare de lungime maximă?

Definiție (Secvență monotonă)

O secvență $a_1, a_2, \ldots, a_n$ este

- crescătoare dacă $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$
- strict crescătoare dacă $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$
- descrescătoare dacă $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$
- strict descrescătoare dacă $a_1 > a_2 > \ldots > a_n$

- Fie secvența $3, 5, 8, 10, 6, 1, 9, 2, 7, 4.$
- Care sunt subsecvențele crescătoare de lungime maximă?

$$(3, 5, 8, 10), (3, 5, 8, 9), (3, 5, 6, 7), (3, 5, 6, 9)$$

- Care sunt subsecvențele descrescătoare de lungime maximă?

$$(10, 9, 7, 4)$$

Teoremă

Presupunem că $m, n \in \mathbb{N} - \{0\}$. O secvență cu mai mult de $m \cdot n$ numere reale trebuie să conțină fie o subsecvență crescătoare de lungime cel puțin $m + 1$, sau o subsecvență strict descrescătoare de lungime cel puțin $n + 1$.

DEMONSTRAȚIE.

$$r_1, r_2, \ldots, r_{m \cdot n+1}$$

Pentru fiecare $1 \leq i \leq m \cdot n + 1$, fie

a_i :=lungimea celei mai lungi subsecvențe crescătoare ce începe cu r_i
d_i :=lungimea celei mai lungi subsecvențe strict descrescătoare ce începe cu r_i

De exemplu, dacă secvența este $3, 5, 8, 10, 6, 1, 9, 2, 7, 4$ atunci

$a_2 = 3$ (pentru subsecvența $5, 8, 10$ sau $5, 8, 9$)
$d_2 = 2$ (pentru subsecvența $5, 1$ sau $5, 2$ sau $5, 4$)

- Presupunem că teorema este falsă $\Rightarrow 1 \leq a_i \leq m$ și
  $1 \leq d_i \leq n$
  $\Rightarrow$ perechea (a_i, d_i) are $m \cdot n$ valori posibile.
- Există $m \cdot n + 1$ perechi $\Rightarrow \exists i < j$ cu $(a_i, d_i) = (a_j, d_j)$.
- Dacă $i < j$ și $(a_i, d_i) = (a_j, d_j)$ atunci
  1. Lungimea maximă a subsecvențelor crescătoare ce pornesc din r_i și din r_j este a_i.
  2. Lungimea maximă a subsecvențelor strict descrescătoare ce pornesc din r_i și din r_j este d_i.

  Acest lucru este imposibil fiindcă
  1. dacă $r_i \leq r_j$ atunci $\underbrace{r_i \leq \overbrace{r_j \leq \ldots}^{\text{lungime } a_i}}_{\text{lungime } a_i+1}$
  2. Dacă $r_i > r_j$ atunci $\underbrace{r_i > \overbrace{r_j > \ldots}^{\text{lungime } d_i}}_{\text{lungime } d_i+1}$.

Pentru fiecare număr real $x \in \mathbb{R}$ definim:

Pentru fiecare număr real $x \in \mathbb{R}$ definim:

- $\lfloor x \rfloor :=$ cel mai mare întreg m astfel încât $m \leq x$.

Pentru fiecare număr real $x \in \mathbb{R}$ definim:

- $\lfloor x \rfloor :=$ cel mai mare întreg m astfel încât $m \leq x$.
- $\lceil x \rceil :=$ cel mai mic întreg m astfel încât $x \leq m$.

Pentru fiecare număr real $x \in \mathbb{R}$ definim:

- $\lfloor x \rfloor :=$ cel mai mare întreg m astfel încât $m \leq x$.
- $\lceil x \rceil :=$ cel mai mic întreg m astfel încât $x \leq m$.
- Partea fracționară a lui x:
  $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$

Pentru fiecare număr real $x \in \mathbb{R}$ definim:

- $\lfloor x \rfloor :=$ cel mai mare întreg m astfel încât $m \leq x$.
- $\lceil x \rceil :=$ cel mai mic întreg m astfel încât $x \leq m$.
- Partea fracționară a lui x:
  $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$
- Un număr irațional este un număr care nu este rezultatul împărțirii a doi întregi.

Pentru fiecare număr real $x \in \mathbb{R}$ definim:

- $\lfloor x \rfloor :=$ cel mai mare întreg m astfel încât $m \leq x$.
- $\lceil x \rceil :=$ cel mai mic întreg m astfel încât $x \leq m$.
- Partea fracționară a lui x:
  $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$
- Un număr irațional este un număr care nu este rezultatul împărțirii a doi întregi.
- Exemple: $\pi = 3.14159265\ldots$, $e = 2.7182818\ldots$, etc.

Pentru fiecare număr real $x \in \mathbb{R}$ definim:

- $\lfloor x \rfloor :=$ cel mai mare întreg m astfel încât $m \leq x$.
- $\lceil x \rceil :=$ cel mai mic întreg m astfel încât $x \leq m$.
- Partea fracționară a lui x:
  $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$
- Un număr irațional este un număr care nu este rezultatul împărțirii a doi întregi.
- Exemple: $\pi = 3.14159265\ldots$, $e = 2.7182818\ldots$, etc.
- Dacă α este un număr irațional și $Q \in \mathbb{N} - \{0\}$, cât de bine putem aproxima α cu un număr rațional $\frac{p}{q}$ unde $1 \leq q \leq Q$?

Pentru fiecare număr real $x \in \mathbb{R}$ definim:

- $\lfloor x \rfloor :=$ cel mai mare întreg m astfel încât $m \leq x$.
- $\lceil x \rceil :=$ cel mai mic întreg m astfel încât $x \leq m$.
- Partea fracționară a lui x:
  $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$
- Un număr irațional este un număr care nu este rezultatul împărțirii a doi întregi.
- Exemple: $\pi = 3.14159265\ldots$, $e = 2.7182818\ldots$, etc.
- Dacă α este un număr irațional și $Q \in \mathbb{N} - \{0\}$, cât de bine putem aproxima α cu un număr rațional $\frac{p}{q}$ unde $1 \leq q \leq Q$?
  - Cât de mic poate deveni $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right|$ când $1 \leq q \leq Q$?

Teoremă (Teorema de aproximare a lui Dirichlet)

Dacă α este un număr irațional și Q un întreg pozitiv, atunci există un număr rațional p/q cu $1 \leq q \leq Q$ astfel încât

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q \cdot (Q+1)}.$$

DEMONSTRAȚIE. Împărțim intervalul $[0, 1]$ în $Q+1$ subintervale de lungimi egale:

$$\left[0, \frac{1}{Q+1}\right), \left[\frac{1}{Q+1}, \frac{2}{Q+1}\right), \ldots, \left[\frac{Q}{Q+1}, 1\right]$$

și următoarele $Q+2$ numere reale:

$$r_1 = 0, r_2 = \{\alpha\}, \{2\alpha\}, \ldots, r_{Q+1} = \{Q\alpha\}, r_{Q+2} = 1$$

- Avem $Q+2$ numere în $Q+1$ intervale

- Avem $Q+2$ numere în $Q+1$ intervale
  $\Rightarrow$ există $i<j$ cu r_i, r_j în același interval

- Avem $Q+2$ numere în $Q+1$ intervale
  $\Rightarrow$ există $i<j$ cu r_i, r_j în același interval
  $\Rightarrow |r_i - r_j| \leq \frac{1}{Q+1}$. Se observă că $(i,j) \neq (1, Q+2)$

- Avem $Q+2$ numere în $Q+1$ intervale
  $\Rightarrow$ există $i<j$ cu r_i, r_j în același interval
  $\Rightarrow |r_i - r_j| \leq \frac{1}{Q+1}$. Se observă că $(i,j) \neq (1, Q+2)$
  Deasemenea

$$
\begin{aligned}
r_1 &= 0 \cdot\alpha - 0 \\
r_i &= (i-1) \cdot\alpha - \lfloor (i-1)\alpha \rfloor \quad \text{dacă } 2 \leq i \leq Q+1 \\
r_{Q+2} &= 0 \cdot\alpha - (-1)
\end{aligned}
$$

- Avem $Q+2$ numere în $Q+1$ intervale
  $\Rightarrow$ există $i<j$ cu r_i, r_j în același interval
  $\Rightarrow |r_i - r_j| \leq \frac{1}{Q+1}$. Se observă că $(i,j) \neq (1, Q+2)$
  Deasemenea

$$\begin{aligned} r_1 &= \quad 0 \quad \cdot\alpha - \quad 0 \\ r_i &= (i-1) \cdot\alpha - \lfloor (i-1)\alpha \rfloor \quad \text{dacă } 2 \leq i \leq Q+1 \\ r_{Q+2} &= \quad 0 \quad \cdot\alpha - (-1) \end{aligned}$$

  $\Rightarrow$ fiecare r_i este $u_i \cdot \alpha - v_i$ cu $u_i, v_i \in \mathbb{Z}$, și
  - dacă $i<j$ atunci $u_i = u_j$ numai dacă $(i,j) = (1, Q+2)$.

- Avem $Q+2$ numere în $Q+1$ intervale
  $\Rightarrow$ există $i<j$ cu r_i, r_j în același interval
  $\Rightarrow |r_i - r_j| \leq \frac{1}{Q+1}$. Se observă că $(i,j) \neq (1, Q+2)$
  Deasemenea

$$\begin{array}{rcclcl} r_1 & = & 0 & \cdot\alpha - & 0 & \\ r_i & = & (i-1) & \cdot\alpha - & \lfloor (i-1)\alpha \rfloor & \text{dacă } 2 \leq i \leq Q+1 \\ r_{Q+2} & = & 0 & \cdot\alpha - & (-1) & \end{array}$$

$\Rightarrow$ fiecare r_i este $u_i \cdot \alpha - v_i$ cu $u_i, v_i \in \mathbb{Z}$, și
  - dacă $i<j$ atunci $u_i = u_j$ numai dacă $(i,j) = (1, Q+2)$.

$$\Rightarrow \quad |r_i - r_j| = |(u_i - u_j)\alpha - (v_i - v_j)| = \underbrace{|u_i - u_j|}_{q \in [1,Q]} \cdot |\alpha - \underbrace{\frac{v_i - v_j}{u_i - u_j}}_{\frac{p}{q}}| \leq \frac{1}{Q+1}.$$

- Avem $Q+2$ numere în $Q+1$ intervale
  $\Rightarrow$ există $i<j$ cu r_i, r_j în același interval
  $\Rightarrow |r_i - r_j| \leq \frac{1}{Q+1}$. Se observă că $(i,j) \neq (1, Q+2)$
  Deasemenea

$$\begin{aligned} r_1 &= 0 \cdot\alpha - 0 \\ r_i &= (i-1)\cdot\alpha - \lfloor (i-1)\alpha \rfloor \quad \text{dacă } 2 \leq i \leq Q+1 \\ r_{Q+2} &= 0 \cdot\alpha - (-1) \end{aligned}$$

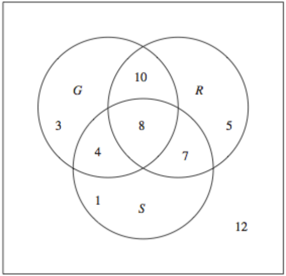
  $\Rightarrow$ fiecare r_i este $u_i \cdot \alpha - v_i$ cu $u_i, v_i \in \mathbb{Z}$, și
  - dacă $i<j$ atunci $u_i = u_j$ numai dacă $(i,j) = (1, Q+2)$.

$$\Rightarrow |r_i - r_j| = |(u_i - u_j)\alpha - (v_i - v_j)| = \underbrace{|u_i - u_j|}_{q\in[1,Q]} \cdot |\alpha - \underbrace{\frac{v_i - v_j}{u_i - u_j}}_{\frac{p}{q}}| \leq \frac{1}{Q+1}.$$

- Deci $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| \leq \dfrac{1}{q\cdot(Q+1)}$.

Presupunem că un sertar conține 50 de mărgele: 25 sunt de sticlă, 30 sunt roșii, 20 sunt sferice, 18 sunt de sticlă roșie, 12 sunt sferice de sticlă, 15 sunt sferice roșii, și 8 sunt sferice de sticlă roșie. Câte mărgele există care nu sunt nici roșii, nici de sticlă și nici sferice?

Răspuns: Desenăm o diagramă Venn cu 3 mulțimi: mulțimea G a mărgelelor de sticlă, R a mărgelelor roșii, și S a mărgelelor sferice.



Observație.
$|G \cup R \cup S| = |G| + |R| + |S| - |G \cap R| - |G \cap S| - |R \cap S| + |G \cap R \cap S|$.

Quizz-uri

Q1: Câți elevi trebuie să fie într-o clasă pentru a fi siguri că cel puțin doi dintre ei au primit aceeași notă? Se presupune că notele acordate sunt de la 0 la 10?

Q2: Câte cărți trebuie luate din un pachet de 52 cărți de joc pentru a fi siguri că avem cel puțin 3 cărți de aceeași culoare?

Q3: Câte cărți trebuie luate din un pachet de 52 cărți de joc pentru a fi siguri că avem cel puțin 2 cărți de culoare roșu?

Ipoteze:

- U: o mulțime universală cu N elemente
- $a_1, \ldots, a_r$: proprietăți ale elementelor mulțimii U
- $N(a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_m})$: numărul obiectelor din U care au simultan proprietățile $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_m}$.
- N_0: numărul obiectelor din U care nu au nici una din aceste proprietăți.

Teoremă (Principiul Incluziunii și Excluziunii)

$$N_0 = N - \sum_{i} N(a_i) + \sum_{i<j} N(a_i a_j) - \sum_{i<j<k} N(a_i a_j a_k) + \ldots$$
$$+ (-1)^m \sum_{i_1 < \cdots < i_m} N(a_{i_1} \ldots a_{i_m}) + \ldots + (-1)^r N(a_1 a_2 \ldots a_r).$$

- Spunem că $a, b \in \mathbb{N}$ sunt relativ prime dacă $\gcd(a, b) = 1$.
- Dacă a, b sunt relativ prime, atunci $a|c$ și $b|c$ dacă și numai dacă $(a \cdot b)|c$.
  EXEMPLU: Numerele 5 și 12 sunt relativ prime pentru că $\gcd(5, 12) = 1$. Rezultă că, dacă c este un întreg pozitiv, atunci $5|c$ și $12|c$ dacă și numai dacă $60|c$.

- Spunem că $a, b \in \mathbb{N}$ sunt relativ prime dacă $\gcd(a, b) = 1$.
- Dacă a, b sunt relativ prime, atunci $a|c$ și $b|c$ dacă și numai dacă $(a \cdot b)|c$.

  EXEMPLU: Numerele 5 și 12 sunt relativ prime pentru că $\gcd(5, 12) = 1$. Rezultă că, dacă c este un întreg pozitiv, atunci $5|c$ și $12|c$ dacă și numai dacă $60|c$.

Observăm că, dacă $A, B, D \in \mathbb{N}$, $A < B$ și $D > 0$, atunci

1. Intervalul $[A, B]$ conține $B - A + 1$ numere întregi, dintre care

$$\left\lfloor \frac{B}{D} \right\rfloor - \left\lceil \frac{A}{D} \right\rceil + 1$$

sunt multipli de D.

EXEMPLU: Câte numere cuprinse între 50 și 213 sunt divizibile cu 12?

$$\left\lfloor \frac{213}{12} \right\rfloor - \left\lceil \frac{50}{12} \right\rceil + 1 = 17 - 5 + 1 = 13.$$

Exemplu

Câte numere cuprinse între 50 și 213 sunt divizibile cu 5 sau 12?

Exemplu

Câte numere cuprinse între 50 și 213 sunt divizibile cu 5 sau 12?

$U = \{n \mid 50 \leq n \leq 213\}$ are $N = 213 - 50 + 1 = 164$ elemente.

- a_1: proprietatea că $50 \leq n \leq 213$ și n este divizibil cu 5.
- a_2: proprietatea că $50 \leq n \leq 213$ și n este divizibil cu 12.

Exemplu

Câte numere cuprinse între 50 și 213 sunt divizibile cu 5 sau 12?

$U = \{n \mid 50 \leq n \leq 213\}$ are $N = 213 - 50 + 1 = 164$ elemente.

- a_1: proprietatea că $50 \leq n \leq 213$ și n este divizibil cu 5.
- a_2: proprietatea că $50 \leq n \leq 213$ și n este divizibil cu 12.

- Primul număr din U divizibil cu 5 este $= 5 \cdot \lceil 50/5 \rceil = 5 \cdot 10 = 50$.
  Ultimul număr din U divizibil cu 5 este $5 \cdot \lfloor 213/5 \rfloor = 5 \cdot 42 = 210$
  $\Rightarrow N(a_1) = 42 - 10 + 1 = 33$.

Exemplu

Câte numere cuprinse între 50 și 213 sunt divizibile cu 5 sau 12?

$U = \{n \mid 50 \leq n \leq 213\}$ are $N = 213 - 50 + 1 = 164$ elemente.

- a_1: proprietatea că $50 \leq n \leq 213$ și n este divizibil cu 5.
- a_2: proprietatea că $50 \leq n \leq 213$ și n este divizibil cu 12.
- Primul număr din U divizibil cu 5 este $= 5 \cdot \lceil 50/5 \rceil = 5 \cdot 10 = 50$.
  Ultimul număr din U divizibil cu 5 este $5 \cdot \lfloor 213/5 \rfloor = 5 \cdot 42 = 210$
  $\Rightarrow N(a_1) = 42 - 10 + 1 = 33$.
- Similar, rezultă că
  $N(a_2) = \lfloor 213/12 \rfloor - \lceil 50/12 \rceil + 1 = 17 - 5 + 1 = 13$.

Exemplu

Câte numere cuprinse între 50 și 213 sunt divizibile cu 5 sau 12?

$U = \{n \mid 50 \leq n \leq 213\}$ are $N = 213 - 50 + 1 = 164$ elemente.

- a_1: proprietatea că $50 \leq n \leq 213$ și n este divizibil cu 5.
- a_2: proprietatea că $50 \leq n \leq 213$ și n este divizibil cu 12.
- Primul număr din U divizibil cu 5 este $= 5 \cdot \lceil 50/5 \rceil = 5 \cdot 10 = 50$.
  Ultimul număr din U divizibil cu 5 este $5 \cdot \lfloor 213/5 \rfloor = 5 \cdot 42 = 210$
  $\Rightarrow N(a_1) = 42 - 10 + 1 = 33$.
- Similar, rezultă că
  $N(a_2) = \lfloor 213/12 \rfloor - \lceil 50/12 \rceil + 1 = 17 - 5 + 1 = 13$.
- Un număr are simultan proprietățile a_1 și a_2 dacă este divizibil cu $5 \cdot 12 = 60$. Deci
  $N(a_1 a_2) = \lfloor 213/60 \rfloor - \lceil 50/60 \rceil + 1 = 3 - 1 + 1 = 3$.

Exemplu

Câte numere cuprinse între 50 și 213 sunt divizibile cu 5 sau 12?

$U = \{n \mid 50 \leq n \leq 213\}$ are $N = 213 - 50 + 1 = 164$ elemente.

- a_1: proprietatea că $50 \leq n \leq 213$ și n este divizibil cu 5.
- a_2: proprietatea că $50 \leq n \leq 213$ și n este divizibil cu 12.
- Primul număr din U divizibil cu 5 este $= 5 \cdot \lceil 50/5 \rceil = 5 \cdot 10 = 50$.
  Ultimul număr din U divizibil cu 5 este $5 \cdot \lfloor 213/5 \rfloor = 5 \cdot 42 = 210$
  $\Rightarrow N(a_1) = 42 - 10 + 1 = 33$.
- Similar, rezultă că
  $N(a_2) = \lfloor 213/12 \rfloor - \lceil 50/12 \rceil + 1 = 17 - 5 + 1 = 13$.
- Un număr are simultan proprietățile a_1 și a_2 dacă este divizibil cu $5 \cdot 12 = 60$. Deci
  $N(a_1 a_2) = \lfloor 213/60 \rfloor - \lceil 50/60 \rceil + 1 = 3 - 1 + 1 = 3$.

  $\Rightarrow$ **Numărul căutat este**
  $N(a_1) + N(a_2) - N(a_1 a_2) = 33 + 13 - 3 = 43$.

- $\varphi(n)$:= numărul întregilor $1 \leq m < n$ cu $\gcd(m,n) = 1$.
- Exemplu: $\varphi(24) = 8$ deoarece sunt 8 intregi între 1 și 23 care nu au factor comun cu 24: 1,5,7,11,13,17,19,23.
- $\varphi(n)$ joacă un rol important în teoria numerelor.
- $\varphi(n)$ poate fi calculată cu Principiul Incluziunii și Excluziunii:
  - Presupunem că $n = p_1^{n_1} \dots p_r^{n_r}$ unde $p_1, \dots, p_r$ sunt numere prime distincte, și $n_i > 0$ pentru $1 \leq i \leq r$.
  - Fie a_i proprietatea "mai mic decât n și divizibil cu p_i" $(1 \leq i \leq r)$

$$\Rightarrow \varphi(n) = N_0 = n - \sum_i N(a_i) + \sum_{i<j} N(a_i a_j) + \dots + (-1)^r N(a_1 \dots a_r).$$

  - $N(a_{i_1} \dots, a_{i_m})$ este numărul de elemente $< n$ divizibile cu $p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_m} \Rightarrow N(a_{i_1} \dots a_{i_m}) = \dfrac{n}{p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_m}}$.

$$\varphi(n) = n - \sum_{i} \frac{n}{p_i} + \sum_{i<j} \frac{n}{p_i p_j} + \ldots + (-1)^n \frac{n}{p_1 p_2 \ldots p_r}$$
$$= n \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

- Exemplu: $\varphi(24) = \varphi(2^3 \cdot 3) = 24 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 8.$

Câte numere prime sunt între 1 și 120?

Câte numere prime sunt între 1 și 120?

OBSERVAŢIE: Dacă n nu este prim atunci $n = a \cdot b$ cu $1 < a \leq b \Rightarrow a^2 \leq n$, deci $a \leq \sqrt{n}$ și n trebuie să fie divizibil cu un număr prim $p \leq \sqrt{n}$.

Câte numere prime sunt între 1 și 120?

OBSERVAŢIE: Dacă n nu este prim atunci $n = a \cdot b$ cu $1 < a \leq b \Rightarrow a^2 \leq n$, deci $a \leq \sqrt{n}$ și n trebuie să fie divizibil cu un număr prim $p \leq \sqrt{n}$.

$\Rightarrow$ CRITERIU de numărare a numerelor prime $< n$:

Câte numere prime sunt între 1 și 120?

OBSERVAŢIE: Dacă n nu este prim atunci $n = a \cdot b$ cu $1 < a \leq b \Rightarrow a^2 \leq n$, deci $a \leq \sqrt{n}$ și n trebuie să fie divizibil cu un număr prim $p \leq \sqrt{n}$.

$\Rightarrow$ CRITERIU de numărare a numerelor prime $< n$:

- Începem cu mulțimea $N = \{1, \ldots, n\}$ și numărăm $N_0 =$ numărul de elemente rămase după ce se elimină din mulțimea N multiplii de numere prime $p \leq \sqrt{n}$.

Câte numere prime sunt între 1 și 120?

OBSERVAŢIE: Dacă n nu este prim atunci $n = a \cdot b$ cu $1 < a \leq b \Rightarrow a^2 \leq n$, deci $a \leq \sqrt{n}$ și n trebuie să fie divizibil cu un număr prim $p \leq \sqrt{n}$.

$\Rightarrow$ CRITERIU de numărare a numerelor prime $< n$:

- Începem cu mulțimea $N = \{1, \ldots, n\}$ și numărăm $N_0 =$ numărul de elemente rămase după ce se elimină din mulțimea N multiplii de numere prime $p \leq \sqrt{n}$.
- Numărul obținut nu este tocmai cel dorit deoarece
  - nu am numărat numerele prime $\leq \sqrt{n}$
  - am numărat 1

Câte numere prime sunt între 1 și 120?

OBSERVAŢIE: Dacă n nu este prim atunci $n = a \cdot b$ cu $1 < a \leq b \Rightarrow a^2 \leq n$, deci $a \leq \sqrt{n}$ și n trebuie să fie divizibil cu un număr prim $p \leq \sqrt{n}$.

$\Rightarrow$ CRITERIU de numărare a numerelor prime $< n$:

- Începem cu mulțimea $N = \{1, \ldots, n\}$ și numărăm N_0 = numărul de elemente rămase după ce se elimină din mulțimea N multiplii de numere prime $p \leq \sqrt{n}$.
- Numărul obținut nu este tocmai cel dorit deoarece
  - nu am numărat numerele prime $\leq \sqrt{n}$
  - am numărat 1
- Numărul căutat este

$$N_0 + r - 1$$

unde r este numărul numerelor prime $\leq \sqrt{n}$.

Câte numere prime sunt între 1 și 120?

Câte numere prime sunt între 1 și 120?

- Cel mai mare număr prim $\leq \sqrt{120}$ este 7

Câte numere prime sunt între 1 și 120?

- Cel mai mare număr prim $\leq \sqrt{120}$ este 7
  - Considerăm mulțimea universală $N = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 120\}$ și eliminăm din N toate elementele divizibile cu un număr prim ≤ 7. Altfel spus, eliminăm din N toate elementele care au una din proprietățile următoare:
    - $a_1 =$ "este divizibil cu $p_1 = 2$"
    - $a_2 =$ "este divizibil cu $p_2 = 3$"
    - $a_3 =$ "este divizibil cu $p_3 = 5$"
    - $a_4 =$ "este divizibil cu $p_4 = 7$"

    și obținem o mulțime M cu N_0 elemente.

Câte numere prime sunt între 1 și 120?

- Cel mai mare număr prim $\leq \sqrt{120}$ este 7
  - Considerăm mulțimea universală $N = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 120\}$ și eliminăm din N toate elementele divizibile cu un număr prim ≤ 7. Altfel spus, eliminăm din N toate elementele care au una din proprietățile următoare:
    - $a_1 =$ "este divizibil cu $p_1 = 2$"
    - $a_2 =$ "este divizibil cu $p_2 = 3$"
    - $a_3 =$ "este divizibil cu $p_3 = 5$"
    - $a_4 =$ "este divizibil cu $p_4 = 7$"

    și obținem o mulțime M cu N_0 elemente.

Î: Este N_0 numărul pe care-l căutăm?

Câte numere prime sunt între 1 și 120?

- Cel mai mare număr prim $\leq \sqrt{120}$ este 7
  - Considerăm mulțimea universală $N = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 120\}$ și eliminăm din N toate elementele divizibile cu un număr prim ≤ 7. Altfel spus, eliminăm din N toate elementele care au una din proprietățile următoare:
    - $a_1 =$ "este divizibil cu $p_1 = 2$"
    - $a_2 =$ "este divizibil cu $p_2 = 3$"
    - $a_3 =$ "este divizibil cu $p_3 = 5$"
    - $a_4 =$ "este divizibil cu $p_4 = 7$"

    și obținem o mulțime M cu N_0 elemente.

Î: Este N_0 numărul pe care-l căutăm?

R: Nu tocmai, fiindcă:

- M conține toate numerele prime între 1 și 120, cu excepția lui $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$.
- M conține 1, care nu este număr prim.

Câte numere prime sunt între 1 și 120?

- Cel mai mare număr prim $\leq \sqrt{120}$ este 7
  - Considerăm mulțimea universală $N = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 120\}$ și eliminăm din N toate elementele divizibile cu un număr prim ≤ 7. Altfel spus, eliminăm din N toate elementele care au una din proprietățile următoare:
    - $a_1 =$ "este divizibil cu $p_1 = 2$"
    - $a_2 =$ "este divizibil cu $p_2 = 3$"
    - $a_3 =$ "este divizibil cu $p_3 = 5$"
    - $a_4 =$ "este divizibil cu $p_4 = 7$"

    și obținem o mulțime M cu N_0 elemente.

Î: Este N_0 numărul pe care-l căutăm?

R: Nu tocmai, fiindcă:

- M conține toate numerele prime între 1 și 120, cu excepția lui $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$.
- M conține 1, care nu este număr prim.

- Numărul numerelor prime ≤ 120 este $N_0 + 4 - 1$.

Câte numere prime sunt între 1 și 120?

Câte numere prime sunt între 1 și 120?

- $N_0 = 120 - \sum_{i=1}^{4} N(a_i) + \sum_{i<j} N(a_i a_j) - \sum_{i<j<k} N(a_i a_j a_k) + N(a_1 a_2 a_3 a_4)$

Câte numere prime sunt între 1 și 120?

- $N_0 = 120 - \sum_{i=1}^{4} N(a_i) + \sum_{i<j} N(a_i a_j) - \sum_{i<j<k} N(a_i a_j a_k) + N(a_1 a_2 a_3 a_4)$
- Observăm că $N(a_{i_1} \dots a_{i_m}) = \left\lfloor \frac{120}{p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_m}} \right\rfloor$ (de ce?)

  De exemplu:
  - $N(a_1) = \lfloor 120/2 \rfloor = 60$, $N(a_2) = \lfloor 120/3 \rfloor = 40$,
    $N(a_3) = \lfloor 120/5 \rfloor = 24$, $N(a_4) = \lfloor 120/7 \rfloor = 17$
  - $N(a_1 a_2) = \lfloor 120/(2 \cdot 3) \rfloor = 20$, $N(a_1 a_3) = \lfloor 120/(2 \cdot 5) \rfloor = 12$,
    ...
  - $N(a_1 a_2 a_3 a_4) = \lfloor 120/(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7) \rfloor = \lfloor 120/210 \rfloor = 0$

Câte numere prime sunt între 1 și 120?

- $N_0 = 120 - \sum_{i=1}^{4} N(a_i) + \sum_{i<j} N(a_i a_j) - \sum_{i<j<k} N(a_i a_j a_k) + N(a_1 a_2 a_3 a_4)$
- Observăm că $N(a_{i_1} \dots a_{i_m}) = \left\lfloor \frac{120}{p_{i_1} \cdot \dots \cdot p_{i_m}} \right\rfloor$ (de ce?)

  De exemplu:
  - $N(a_1) = \lfloor 120/2 \rfloor = 60$, $N(a_2) = \lfloor 120/3 \rfloor = 40$,
    $N(a_3) = \lfloor 120/5 \rfloor = 24$, $N(a_4) = \lfloor 120/7 \rfloor = 17$
  - $N(a_1 a_2) = \lfloor 120/(2 \cdot 3) \rfloor = 20$, $N(a_1 a_3) = \lfloor 120/(2 \cdot 5) \rfloor = 12$,
    ...
  - $N(a_1 a_2 a_3 a_4) = \lfloor 120/(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7) \rfloor = \lfloor 120/210 \rfloor = 0$

  $\Rightarrow N_0 = 120 - (60 + 40 + 24 + 17) + (20 + 12 + 8 + 8 + 5 + 3) - (4 + 2 + 1 + 1) + 0 = 27$.

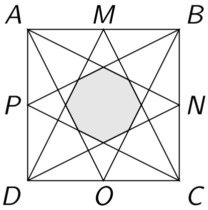
Câte numere prime sunt între 1 și 120?

- $N_0 = 120 - \sum_{i=1}^{4} N(a_i) + \sum_{i<j} N(a_i a_j) - \sum_{i<j<k} N(a_i a_j a_k) + N(a_1 a_2 a_3 a_4)$
- Observăm că $N(a_{i_1} \ldots a_{i_m}) = \left\lfloor \frac{120}{p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_m}} \right\rfloor$ (de ce?)

  De exemplu:
  - $N(a_1) = \lfloor 120/2 \rfloor = 60$, $N(a_2) = \lfloor 120/3 \rfloor = 40$,
    $N(a_3) = \lfloor 120/5 \rfloor = 24$, $N(a_4) = \lfloor 120/7 \rfloor = 17$
  - $N(a_1 a_2) = \lfloor 120/(2 \cdot 3) \rfloor = 20$, $N(a_1 a_3) = \lfloor 120/(2 \cdot 5) \rfloor = 12$,
    ...
  - $N(a_1 a_2 a_3 a_4) = \lfloor 120/(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7) \rfloor = \lfloor 120/210 \rfloor = 0$

  $\Rightarrow N_0 = 120 - (60 + 40 + 24 + 17) + (20 + 12 + 8 + 8 + 5 + 3) - (4 + 2 + 1 + 1) + 0 = 27$.
- Numărul pe care-l căutăm este $27 + 4 - 1 = 30$

Q1: Ce arie are octogonul gri din figura de mai jos?



Se presupune că $ABCD$ este un pătrat cu latura 1 și că M, N, O, P sunt mijloacele laturilor AB, BC, CD, DA.

Q2: O parolă este un șir de 7 caractere ASCII care conține o literă mare și o cifră zecimală. Se știe că mulțimea de caractere ASCII are 128 caractere dintre care 26 sunt litere mari iar 10 sunt cifre zecimale. Câte astfel de parole se pot forma?

Q3: Câte soluții are ecuația $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ dacă $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}$, $x_1 \leq 3$, $x_2 \leq 4$ și $x_3 \leq 6$?