1.3 Principiul porumbelului

Principiul porumbelului (engl. *pigeonhole principle*) este o regulă simplă de raţionament în combinatorica existenţială:

PRINCIPIUL PORUMBELULUI. Dacă $k+1$ sau mai multe obiecte sunt puse în k cutii atunci cel puţin o cutie conţine cel puţin două obiecte.

Exemplul 1. Într-un grup de 367 persoane sunt cel puţin 2 persoane cu aceeaşi zi de naştere.

DEMONSTRAŢIE: Orice an (bisect sau nu) are cel mult $k = 366$ zile. Grupul are $k+1$ persoane deci cel puţin 2 persoane au aceeaşi zi de naştere. $\square$

Exemplul 2. Câţi elevi trebuie să fie într-o clasă pentru a fi siguri că cel puţin doi dintre ei au primit aceeaşi notă? Se presupune că notele acordate sunt de la 0 la 10.

RĂSPUNS: Sunt $k = 11$ posibilităţi de dat o notă. Conform principiului porumbelului, trebuie să fie cel puţin $k+1 = 12$ elevi în clasă pentru a avea cel puţin 2 elevi cu aceeaşi notă. $\square$

Principiul porumbelului poate fi generalizat:

PRINCIPIUL GENERALIZAT AL PORUMBELULUI. Dacă N obiecte sunt puse în k cutii, atunci cel puţin o cutie conţine cel puţin $\lceil N/k \rceil$ obiecte.

Exemplul 3. Într-un grup de 100 persoane sunt cel puţin 9 persoane născute în aceeaşi lună.

DEMONSTRAŢIE: Anul are 12 luni, deci sunt cel puţin $\lceil 100/12 \rceil = 9$ persoane născute în aceeaşi lună. $\square$

Exemplul 4. Câte cărţi trebuie luate din un pachet de 52 cărţi de joc pentru a fi siguri că avem cel puţin 3 cărţi de aceeaşi culoare?

RĂSPUNS: Presupunem că sunt 4 cutii în care punem cărţile luate din pachet, câte o cutie pentru fiecare culoare de carte de joc. Conform principiului generalizat al porumbelului, dacă luăm N cărţi atunci cel puţin o cutie conţine $\lceil N/4 \rceil$ cărţi. Cel mai mic număr N pentru care $\lceil N/4 \rceil = 3$ este $N = 9$, deci trebuie luate 9 cărţi din pachet. $\square$

Exemplul 5. Câte cărţi trebuie luate din un pachet de 52 cărţi de joc pentru a fi siguri că avem cel puţin 2 cărţi de culoare roşu?

RĂSPUNS: Sunt $52/4 = 13$ cărţi de fiecare culoare. În cel mai rău caz, nici una din primele $3 \cdot 13 = 39$ cărţi selectate nu este roşu. Pentru a fi siguri că avem cel puţin 2 cărţi roşu, trebuie luate $39 + 2 = 41$ cărţi din pachet. $\square$

1.3.1 Aplicaţii remarcabile

Teorema 1. Presupunem că $m, n \in \mathbb{N} - \{0\}$. O secvenţă cu mai mult de $m \cdot n$ numere reale trebuie să conţină fie o subsecvenţă crescătoare de lungime cel puţin $m+1$, sau o subsecvenţă strict descrescătoare de lungime cel puţin $n+1$.

DEMONSTRAŢIE: Fie S' secvenţa respectivă şi

$$S = r_1, r_2, \ldots, r_{m \cdot n+1}$$

secvenţa primelor $m \cdot n+1$ elemente ale lui S'. Pentru fiecare $1 \leq i \leq m \cdot n+1$, fie a_i lungimea celei mai lungi subsecvenţe crescătoare ce începe cu r_i, şi d_i lungimea celei mai lungi subsecvenţe strict descrescătoare ce începe cu r_i.

De exemplu, dacă $S = \texttt{3}, \texttt{5}, \texttt{8}, \texttt{10}, \texttt{6}, \texttt{1}, \texttt{9}, \texttt{2}, \texttt{7}, \texttt{4}$ atunci

$a_2 = 3$ (pentru subsecvenţa $\texttt{5}, \texttt{8}, \texttt{10}$ sau $\texttt{5}, \texttt{8}, \texttt{9}$)
$d_2 = 2$ (pentru subsecvenţa $\texttt{5}, \texttt{1}$ sau $\texttt{5}, \texttt{2}$ sau $\texttt{5}, \texttt{4}$)

Demonstrăm teorema prin reducere la absurd. Dacă Teorema 1 ar fi falsă, am avea $1 \leq a_i \leq m$ şi $1 \leq d_i \leq n$ pentru toţi $i \in \{1, 2, \ldots, m \cdot n+1\}$, deci mulţimea de perechi $\{\langle a_i, d_i \rangle \mid 1 \leq i \leq m \cdot n+1\}$ ar avea cel mult $m \cdot n$ elemente. Conform principiului porumbelului, există $1 \leq i < j \leq m \cdot n+1$ cu $\langle a_i, d_i \rangle = \langle a_j, d_j \rangle$. Deducem că (1) lungimea maximă a subsecvenţelor crescătoare ce pornesc din r_i şi din r_j este a_i, şi (2) lungimea maximă a subsecvenţelor strict descrescătoare ce pornesc din r_i şi din r_j este d_i.

Acest lucru este imposibil fiindcă

1. dacă $r_i \leq r_j$ atunci $\underbrace{r_i \leq \overbrace{r_j \leq \ldots}^{\text{lungime } a_i}}_{\text{lungime } a_i+1}$, ceea ce contrazice (1).
2. dacă $r_i > r_j$ atunci $\underbrace{r_i > \overbrace{r_j > \ldots}^{\text{lungime } d_i}}_{\text{lungime } d_i+1}$, ceea ce contrazice (2).

Rezultă că Teorema 1 are loc. $\square$

Înainte de a indica aplicaţia următoare, reamintim câteva noţiuni de bază despre numere reale: dacă $x \in \mathbb{R}$ atunci

- $\lfloor x \rfloor$ este cel mai mare întreg $m \in \mathbb{Z}$ astfel încât $m \leq x$, iar $\lceil x \rceil$ este cel mai mic întreg $m \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x \leq m$,

- **partea fracţionară** a lui x este $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.
- un număr **iraţional** este un număr din mulţimea $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Teorema următoare dovedeşte că numerele iraţionale pot fi aproximate oricât de bine cu un număr raţional.

Teorema 2 (Teorema de aproximare a lui Dirichlet). Dacă α este un număr iraţional şi Q un întreg pozitiv, atunci există un număr raţional p/q cu $1 \leq q \leq Q$ astfel încât

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q \cdot (Q+1)}. \tag{1.18}$$

Demonstraţie. Împărţim intervalul $[0, 1]$ în $Q + 1$ subintervale disjuncte de lungime $\leq 1/(Q + 1)$:

$$I_1 = \left[0, \frac{1}{Q+1}\right),\ I_2 = \left[\frac{1}{Q+1}, \frac{2}{Q+1}\right), \ldots, I_{Q+1} = \left[\frac{Q}{Q+1}, 1\right]$$

Deasemenea, definim următoarele $Q + 2$ numere reale:

$$r_1 = 0, r_2 = \{\alpha\}, r_3 = \{2\alpha\},\ \ldots,\ r_{Q+1} = \{Q\alpha\},\ r_{Q+2} = 1.$$

Cele $Q + 2$ numere sunt în $Q + 1$ subintervale disjuncte, deci există indicii $1 \leq i < j \leq Q + 2$ astfel încât r_i, r_j sunt în acelaşi subinterval, adică $|r_i - r_j| \leq 1/(Q+1)$. Se observă că $\langle i, j\rangle \neq \langle 1, Q + 2\rangle$, pentru că acest lucru ar implica $|r_i - r_j| = |r_1 - r_{Q+2}| = 1 > 1/(Q + 1)$. Deasemenea

$$\begin{array}{rccl} r_1 = & 0 & \cdot\alpha - 0 & \\ r_k = & (k-1) & \cdot\alpha - \lfloor (k-1)\alpha \rfloor & \text{dacă } 2 \leq i \leq Q+1 \\ r_{Q+2} = & 0 & \cdot\alpha - (-1) & \end{array}$$

Deci fiecare număr r_k este de forma $u_k \cdot \alpha + v_k$ cu $u_k, v_k \in \mathbb{Z}$, şi $u_i \neq u_j$ fiindcă $\langle i, j\rangle \neq \langle 1, Q + 2\rangle$. Rezultă că

$$|r_i - r_j| = |(u_i - u_j) \cdot \alpha + (v_i - v_j)| = \underbrace{|u_i - u_j|}_{q \in [1,Q]} \cdot \left|\alpha - \underbrace{\frac{v_i - v_j}{u_i - u_j}}_{\frac{p}{q}}\right| \leq \frac{1}{Q+1}$$

deci (1.18) are loc pentru un număr raţional p/q cu $1 \leq q \leq Q$. □

Teorema 3. Dacă $n \in \mathbb{N}$ şi A este o mulţime de $n + 1$ numere cuprinse între 1 şi $2\,n$, atunci există $a, b \in A$, $a \neq b$ astfel încât a divide b.

DEMONSTRAŢIE: Fie $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\}$. Fiecare număr a_i se scrie în mod unic sub forma $a_i = 2^{k_i} \cdot q_i$ cu $k_i, q_i \in \mathbb{N}$ şi q_i număr impar. Rezultă că $q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}$ sunt numere impare cuprinse între 1 şi $2 \cdot n - 1$. Deoarece intervalul $[1, 2n - 1]$ conţine n numere impare, există $i < j$ astfel încât $q_i = q_j$, deci $a_i = q_i \cdot 2^{k_i}, a_j = q_i \cdot 2^{k_j}$ cu $k_i \neq k_j$. Fie $a = \min\{a_i, a_j\}$ şi $b = \max\{a_i, a_j\}$. Este evident că $a, b \in A$, $a \neq b$ şi a divide b. □

1.3.2 Concluzii

Principiul porumbelului este un criteriu simplu şi puternic de analiză în combinatorica existenţială, adică de determinare a existenţei unor aranjamente cu anumite proprietăţi.

1.3.3 Exerciţii

1. Într-un grup de 6 persoane, orice pereche de indivizi sunt prieteni sau duşmani. Demonstraţi că grupul respectiv conţine fie 3 indivizi care sunt prieteni între ei, fie 3 indivizi csre sunt duşmani între ei.

2. Un sertar conţine 12 ciorapi maro şi 12 ciorapi negri.

   (a) Câţi ciorapi trebuie scoşi din sertar pentru a fi siguri că au fost scoşi cel puţin 2 ciorapi de aceeaşi culoare?

   (b) Câţi ciorapi trebuie scoşi din sertar pentru a fi siguri că au fost scoşi cel puţin 4 ciorapi negri?

3. Câte numere trebuie selectate din mulţimea $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ pentru a fi siguri că am selectat cel puţin 2 numere a căror sumă este 7?

4. n pugilişti concurează într-un turneu care prevede un meci între fiecare pereche de pugilişti. Fiecare pugilist a pierdut cel puţin un meci. Demonstraţi că cel puţin 2 pugilişti au obţinut acelaşi număr de victorii.

1.4 Principiul incluziunii şi excluziunii

Principiul incluziunii şi excluziunii este o generalizare a regulii sumei din teoria numărării:

> Dacă A, B sunt mulţimi finite, atunci numărul de posibilităţi de a alege un element din $A \cup B$ este $|A| + |B| - |A \cap B|$.

Versiunea generală a principiului incluziunii şi excluziunii este

> Dacă $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sunt mulţimi finite atunci numărul de posibilităţi de a alege un element din $\bigcup_{i=1}^n A_i$ este

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = {} & |A_1 + |A_2| + \ldots + |A_n| \\ & - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \ldots \qquad \text{(toate perechile)} \\ & + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \ldots \qquad \text{(toate triplurile)} \\ & \ldots \\ & + (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.\end{aligned}$$

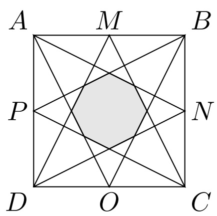
Exerciţiul 1. Un sertar conţine 50 mărgele: 25 sunt de sticlă, 30 sunt roşii, 20 sunt sferice, 18 sunt de sticlă roşie, 12 sunt sferice de sticlă, 15 sunt sferice roşii, şi 8 sunt sferice de sticlă roşie. Câte mărgele există care nu sunt nici roşii, nici de sticlă şi nici sferice?

RĂSPUNS: Fie mulţimea A_1 a mărgelelor de sticlă, A_2 a mărgelelor roşii, şi A_3 a mărgelelor sferice. Numărul căutat este $50 - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$. Din datele problemei ştim că $|A_1| = 25$, $|A_2| = 30$, $|A_3| = 20$, $|A_1 \cap A_2| = 18$, $|A_1 \cap A_3| = 12$, $|A_2 \cap A_3| = 15$ şi $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 8$. Deasemenea, ştim că

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = {} & |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| \\ & + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 25 + 30 + 20 - 18 - 12 - 15 + 8 = 38\end{aligned}$$

deci numărul căutat este $50 - 38 - 12$. □

Exerciţiul 2*. Ce arie are octogonul gri din figura de mai jos?



Se presupune că $ABCD$ este un pătrat cu latura 1 şi că M, N, O, P sunt mijloacele laturilor AB, BC, CD, DA.

Răspuns: Fie $\{F_i \mid 1 \leq i \leq 8\}$ mulţimea triunghiurilor echilaterale $\{ABP,$ $ABN, BCO, BCM, CDP, CDN, DAM, DAO\}$, şi S octogonul gri din figură. În cele ce urmează vom folosi notaţia $a(F)$ pentru aria unei figuri geometrice F. Ni se cere să calculăm $a(S)$.

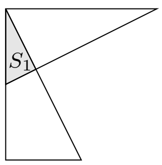
Se observă uşor că $a(F_i) = 1/4$ pentru $1 \leq i \leq 8$, şi

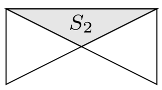
$$a(S) = a(ABCD) - a\left(\bigcup_{i=1}^{8} F_i\right) = 1 - a\left(\bigcup_{i=1}^{8} F_i\right).$$

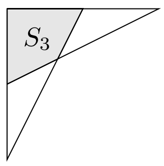
Conform principiului generalizat al incluziunii şi excluziunii, avem

$$\begin{aligned} a\left(\bigcup_{i=1}^{8} F_i\right) &= \sum_{i=1}^{8} a(F_i) - \sum_{1\leq i<j\leq 8} a(F_i \cap F_j) + \sum_{1\leq i<j<k\leq 8} a(F_i \cap F_j \cap F_k) \\ &= 2 - \sum_{1\leq i<j\leq 8} a(F_i \cap F_j) + \sum_{1\leq i<j<k\leq 8} a(F_i \cap F_j \cap F_k). \end{aligned}$$

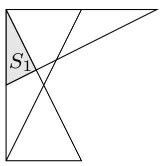
Două figuri diferite F_i, F_j se pot suprapune în trei feluri, indicate prin zonele gri în figurile de mai jos:







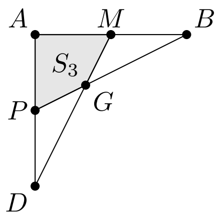
iar trei figuri diferite F_i, F_j, F_k se pot suprapune în un singur fel:



Rezultă că

$$\sum_{1\leq i<j\leq 8} a(F_i \cap F_j) + \sum_{1\leq i<j<k\leq 8} a(F_i \cap F_j \cap F_k) = 4 \cdot (a(S_2) + a(S_3)).$$

Însă $a(S_2) = a(F_1)/2 = 1/8$. Deasemenea, din figura de mai jos



rezultă că $|PB| = \sqrt{|AB|^2 + |AP|^2} = \sqrt{5}/2$ şi

- G este centrul de greutate al lui ABD, deci $|PG| = \frac{|PB|}{3} = \frac{\sqrt{5}}{6}$
- distanţa de la A la PB este $d(A, PB) = \frac{|AP| \cdot |AB|}{|PB|} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Prin urmare $a(S_3) = 2 \cdot a(APG) = |PG| \cdot d(A, PB) = \frac{1}{6}$. Aşadar

$$4 \cdot (a(S_2) + a(S_3)) = 4 \cdot \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{6}\right) = \frac{7}{6}$$

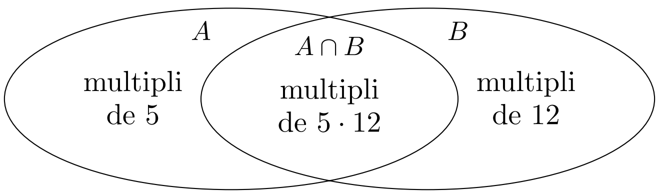
şi $a(S) = 2 - \dfrac{7}{6} = \dfrac{5}{6}$. □

Înainte de a ilustra exerciţiul următor, reamintim câte noţiuni şi proprietăţi elementare din teoria numerelor.

- ▶ Două numere $a, b \in \mathbb{N}$ sunt **prime între ele** dacă cel mai mare divizor comun al lor este 1: $\gcd(a, b) = 1$. De exemplu, 5 şi 2 sunt prime între ele fiindcă $\gcd(5, 12) = 1$.
- ▶ Dacă $a, b, m \in \mathbb{N}$ şi $\gcd(a, b) = 1$ atunci m este multiplu de a şi multiplu de b dacă şi numai dacă este multiplu de $a \cdot b$.
- ▶ Dacă $A, B, d \in \mathbb{N}$, $A \le B$ şi $d > 0$ atunci intervalul $[A, B]$ conţine $B - A + 1$ numere întregi, dintre care $\lfloor \frac{B}{d} \rfloor - \lceil \frac{A}{d} \rceil + 1$ se divid cu d.

Exerciţiul 3. Câte numere întregi cuprinse între 50 şi 213 sunt divizibile cu 5 sau 12?

RĂSPUNS: Fie A mulţimea întregilor din intervalul $[50, 213]$ divizibili cu 5, şi B mulţimea întregilor din intervalul $[50, 213]$ divizibili cu 12. Avem de calculat $|A \cup B|$. $\gcd(5, 12) = 1$, deci $A \cap B$ este mulţimea întregilor divizibili cu $5 \cdot 12 = 60$.



Conform principiului incluziunii şi excluziunii: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Deasemenea, ştim că

$$\begin{aligned} |A| &= \left\lfloor \frac{213}{5} \right\rfloor - \left\lceil \frac{50}{5} \right\rceil + 1 = 42 - 10 + 1 = 33, \\ |B| &= \left\lfloor \frac{213}{12} \right\rfloor - \left\lceil \frac{50}{12} \right\rceil + 1 = 17 - 5 + 1 = 13, \\ |A \cap B| &= \left\lfloor \frac{213}{60} \right\rfloor - \left\lceil \frac{50}{60} \right\rceil + 1 = 3 - 1 + 1 = 3 \end{aligned}$$

deci numărul căutat este $33 + 13 - 3 = 43$. □

Exerciţiul 4. O parolă este un şir de 7 caractere ASCII care conţine o literă mare şi o cifră zecimală. Se ştie că mulţimea de caractere ASCII are 128 caractere dintre care 26 sunt litere mari iar 10 sunt cifre zecimale. Câte astfel de parole se pot forma?

RĂSPUNS: Fie A mulţimea caracterelor ASCII, S mulţimea parolelor posibile şi S' mulţimea şirurilor de 7 caractere ASCII. Ni se cere să calculăm $|S|$. Se observă că $S \subseteq S'$. Deci, conform regulii sumei: $|S'| = |S| + |S' - S|$. Rezultă că $|S| = |S'| - |S' - S| = 128^7 - |S' - S|$.

Pe de altă parte, $S' - S = X \cup Y$ unde X este mulţimea şirurilor de 7 caractere ASCII în care nu apare nici o literă mare, iar Y este mulţimea şirurilor de 7 caractere ASCII în care nu apare nici o cifră zecimală. Conform principiului incluziunii şi excluziunii

$$\begin{aligned} |S' - S| &= |X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y| \\ &= (128 - 26)^7 + (128 - 10)^7 - (128 - 26 - 10)^7 \\ &= 102^7 + 118^7 - 92^7. \end{aligned}$$

Deci numărul de parole posibile este $128^7 - 102^7 - 118^7 + 92^7$. □

1.4.1 O notaţie convenabilă

În general, dacă A este o mulţime finită iar $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sunt proprietăţi pentru elementele din A, vom folosi notaţia A_i pentru mulţimea de elemente din A cu proprietatea P_i, $N(P_{i_1} P_{i_2} \ldots P_{i_k})$ pentru numărul de elemente din A care au proprietăţile $P_{i_1}, P_{i_2}, \ldots, P_{i_k}$, şi $N(P'_{i_1} P'_{i_2} \ldots P'_{i_k})$ pentru numărul de elemente din A care nu au nici una din proprietăţile $P_{i_1}, P_{i_2}, \ldots, P_{i_k}$. Deci

$$\begin{aligned} N(P_{i_1} P_{i_2} \ldots P_{i_k}) &= |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}|, \\ N(P'_{i_1} P'_{i_2} \ldots P'_{i_k}) &= |A| - |A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \ldots \cup A_{i_k}| \end{aligned}$$

iar din principiul incluziunii şi excluziunii rezultă că

$$\begin{aligned} N(P_1'P_2'\dots P_n') = |A| - \sum_{i=1}^{n} N(P_i) + \sum_{i\le i_1<i_2\le n} N(P_{i_1}P_{i_2}) \\ - \sum_{i\le i_1<i_2<i_3\le n} N(P_{i_1}P_{i_2}P_{i_3}) + \dots + (-1)^n N(P_1P_2\dots P_n). \end{aligned}$$

Exerciţiul 5. Câte soluţii are ecuaţia

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11$$

dacă $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}$, $x_1 \le 3$, $x_2 \le 4$ şi $x_5 \le 6$?

RĂSPUNS: Fie $A = \{\langle x_1, x_2, x_3\rangle \in \mathbb{N}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 11\}$, şi proprietăţile următoare: P_1 dacă $x_1 > 3$, P_2 dacă $x_2 > 4$, şi P_3 dacă $x_3 > 6$. Ni se cere să calculăm $N(P_1'P_2'P_3')$.

$$\begin{aligned} N(P_1'P_2'P_3') &= |A| - N(P_1) - N(P_2) - N(P_3) \\ &\quad + N(P_1P_2) + N(P_1P_3) + N(P_2P_3) - N(P_1P_2P_3). \end{aligned}$$

Însă $|A| = C(3 + 11 - 1, 3 - 1) = 78$ (vezi Exerciţiul 21 de la pagina 14) şi

- $\langle x_1, x_2, x_3\rangle \in A_1$ este echivalent cu $x_1 = 4 + u$ şi $\langle u, x_2, x_3\rangle \in \mathbb{N}^3$ astfel încât $u + x_2 + x_3 = 11 - 4 = 7$, deci $N(P_1) = \binom{7+3-1}{3-1} = \binom{9}{2} = 36$,
- $\langle x_1, x_2, x_3\rangle \in A_2$ este echivalent cu $x_2 = 5 + u$ şi $\langle x_1, u, x_3\rangle \in \mathbb{N}^3$ astfel încât $x_1 + u + x_3 = 11 - 5 = 7$, deci $N(P_2) = \binom{6+3-1}{3-1} = \binom{8}{2} = 28$,
- $\langle x_1, x_2, x_3\rangle \in A_3$ este echivalent cu $x_3 = 7 + u$ şi $\langle x_1, x_2, u\rangle \in \mathbb{N}^3$ astfel încât $x_1 + x_2 + u = 11 - 7 = 4$, deci $N(P_1) = \binom{4+3-1}{3-1} = \binom{6}{2} = 15$,
- $\langle x_1, x_2, x_3\rangle \in A_1 \cap A_2$ este echivalent cu $x_1 = 4 + u$, $x_2 = 5 + v$ şi $\langle u, v, x_3\rangle \in \mathbb{N}^3$ astfel încât $u + v + x_3 = 11 - 4 - 5 = 2$, deci $N(P_1P_2) = \binom{2+3-1}{3-1} = \binom{4}{2} = 6$,
- $\langle x_1, x_2, x_3\rangle \in A_1 \cap A_3$ este echivalent cu $x_1 = 4 + u$, $x_3 = 7 + v$ şi $\langle u, x_2, v\rangle \in \mathbb{N}^3$ astfel încât $u + x_2 + v = 11 - 4 - 7 = 0$, deci $N(P_1P_3) = \binom{0+3-1}{3-1} = \binom{2}{0} = 1$,
- $\langle x_1, x_2, x_3\rangle \in A_2 \cap A_3$ este echivalent cu $x_2 = 5 + u$, $x_3 = 7 + v$ şi $\langle x_1, u, v\rangle \in \mathbb{N}^3$ astfel încât $x_1 + u + v = 11 - 5 - 7 = -1$. Deoarece nu există un astfel de tuplu, $N(P_1P_2) = 0$,

- $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle \in A_1 \cap A_2 \cap A_3$ este echivalent cu $x_1 = 4 + u$, $x_2 = 5 + v$, $x_3 = 7+w$, şi $\langle u, v, w \rangle \in \mathbb{N}^3$ astfel încât $u+v+w = 11-4-5-7 = -5$. Deoarece nu există un astfel de tuplu, $N(P_1P_2P_3) = 0$.

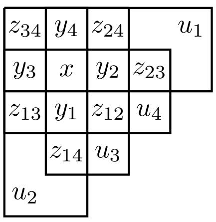
Rezultă că $N(P_1'P_2'P_3') = 78 - 36 - 28 - 15 + 6 + 1 + 0 - 0 = 6$. □

Exerciţiul 6.** La o conferinţă de presă participă 200 jurnalişti vorbitori de germană, franceză, engleză şi japoneză, dintre care: 175 vorbesc germană, 150 vorbesc franceză, 180 vorbesc engleză, şi 160 vorbesc japoneză. Care este numărul minim de jurnalişti participanţi la conferinţă care vorbesc toate cele patru limbi?

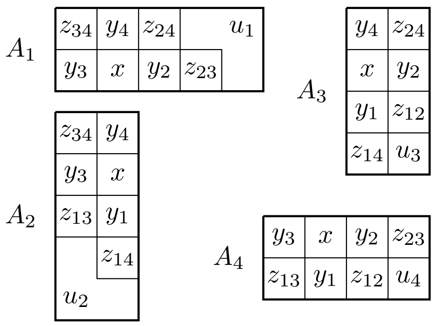
RĂSPUNS: Fie A mulţimea celor 200 de jurnalişti, şi P_1, P_2, P_3, P_4 calităţile lor de a putea vorbi germană, franceză, engleză şi japoneză. Fie

$$
\begin{aligned}
&x = N(P_1P_2P_3P_4),\\
&y_1 = N(P_1'P_2P_3P_4), y_2 = N(P_1P_2'P_3P_4),\\
&y_3 = N(P_1P_2P_3'P_4), y_4 = N(P_1P_2P_3P_4'),\\
&z_{12} = N(P_1'P_2'P_3P_4), z_{13} = N(P_1'P_2P_3'P_4), z_{14} = N(P_1'P_2P_3P_4'),\\
&z_{23} = N(P_1P_2'P_3'P_4), z_{24} = N(P_1P_2'P_3P_4'), z_{34} = N(P_1P_2P_3'P_4'),\\
&u_1 = N(P_1P_2'P_3'P_4'), u_2 = N(P_1'P_2P_3'P_4'),\\
&u_3 = N(P_1'P_2'P_3P_4'), u_4 = N(P_1'P_2'P_3'P_4).
\end{aligned}
$$

A diagramă Venn a intersecţiilor mulţimilor A_i este ilustrată mai jos:



unde



Observaţie: o diagramă Venn pentru 4 mulţimi nu se poate desena cu cercuri, dar se poate desena cu dreptunghiuri.

Ni se cere să aflăm valoarea minimă a lui x în prezenţa constrângerilor

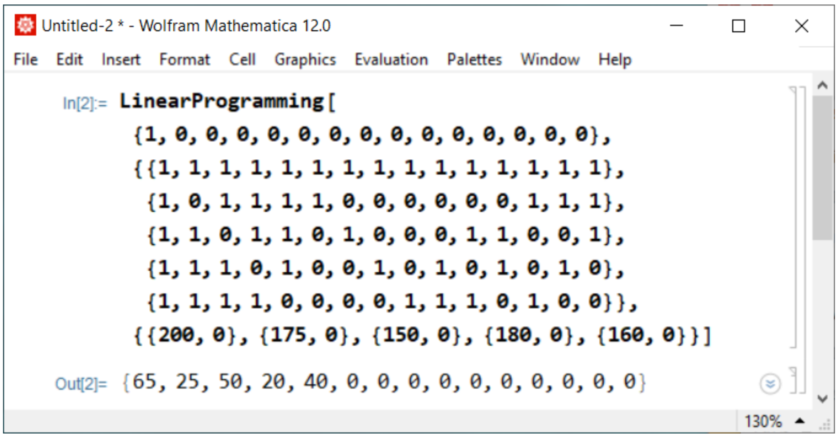
$$
\begin{aligned}
|A| &= x + \sum_{i=1}^{3}(y_i + u_i) + z_{12} + z_{13} + z_{14} + z_{23} + z_{24} + z_{34} = 200,\\
|A_1| &= N(P_1) = x + y_2 + y_3 + y_4 + z_{23} + z_{24} + z_{34} + u_1 = 175,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|A_2| = N(P_2) &= x + y_1 + y_3 + y_4 + z_{13} + z_{14} + z_{34} + u_2 = 150,\\
|A_3| = N(P_3) &= x + y_1 + y_2 + y_4 + z_{12} + z_{14} + z_{24} + u_3 = 180,\\
|A_4| = N(P_4) &= x + y_1 + y_2 + y_3 + z_{12} + z_{13} + z_{23} + u_4 = 160,\\
&x, y_1, y_2, y_3, u_1, u_2, u_3, z_{12} + z_{13} + z_{14}, z_{23} + z_{24} + z_{34} \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Aceasta este o problemă de programare liniară cu întreagi (engl. *integer linear programming*), care este dificilă.[1]. În schimb, aflarea valorii minime a lui $x \in \mathbb{R}$ în prezenţa constrângerilor

$$
\begin{aligned}
x + \sum_{i=1}^{4}(y_i + u_i) + z_{12} + z_{13} + z_{14} + z_{23} + z_{24} + z_{34} &= 200,\\
x + y_2 + y_3 + y_4 + z_{23} + z_{24} + z_{34} + u_1 &= 175,\\
x + y_1 + y_3 + y_4 + z_{13} + z_{14} + z_{34} + u_2 &= 150,\\
x + y_1 + y_2 + y_4 + z_{12} + z_{14} + z_{24} + u_3 &= 180,\\
x + y_1 + y_2 + y_3 + z_{12} + z_{13} + z_{23} + u_4 &= 160,\\
x, y_1, y_2, y_3, u_1, u_2, u_3, z_{12} + z_{13} + z_{14}, z_{23} + z_{24} + z_{34} &\geq 0
\end{aligned}
$$

este o problemă de programare liniară care se poate rezolva uşor cu algoritmul simplex. Algoritmul simplex este implementat în numeroase sisteme software de calcul. În Mathematica [13], poate fi apelat cu comanda




```
In[2]:= LinearProgramming[
  {1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
  {{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1},
   {1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1},
   {1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1},
   {1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0},
   {1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0}},
  {{200, 0}, {175, 0}, {150, 0}, {180, 0}, {160, 0}}]
Out[2]= {65, 25, 50, 20, 40, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}
```

care confirmă că minimul este atins când $x = 65$, $y_1 = 25$, $y_2 = 50$, $y_3 = 20$, $y_4 = 40$, $z_{12} = z_{13} = z_{14} = z_{23} = z_{24} = z_{34} = 0$. Deoarece aceste valori sunt numere naturale, rezultă că numărul minim posibil de jurnalişti care vorbesc toate cele patru limbi este $x = 65$. $\square$

[1]Se ştie programarea liniară cu întregi este o problemă NP-completă.

1.4.2 Aplicaţii remarcabile

Funcţia totient

În 1763, Euler a definit funcţia $\varphi : \mathbb{N} - \{0\} \to \mathbb{N}$, unde $\varphi(n)$ este numărul întregilor $1 \leq m < n$ cu $\gcd(m, n) = 1$. De exemplu, $\varphi(24) = 8$ fiindcă sunt 8 întregi $1 \leq m < n$ cu $\gcd(m, 24) = 1$: 1.5,7,11,13,17,19,23.

φ se numeşte **funcţia totient** a lui Euler. Această funcţie joacă un rol important în teoria numerelor.

În cele ce urmează vom descoperi o formulă simplă de calcul al lui $\varphi(n)$ cu ajutorul principiului generalizat al incluziunii şi excluziunii.

Fie $n = p_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r}$ descompunerea unică a lui n în produs de puteri de numere prime distincte, cu $n_i > 0$ pentru $1 \leq i \leq r$, şi A mulţimea numerelor $1 \leq m < n$ cu $\gcd(m, n) = 1$. Pentru fiecare $1 \leq i \leq r$ definim mulţimea $A_i = \{m \in \mathbb{N} \mid 1 \leq m \leq n \text{ şi } p_i \text{ divide } n\}$. Se observă uşor că $A = \bigcup_{i=1}^{r} A_i$. Conform principiului incluziunii şi excluziunii

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= n - |A| = n - \left|\bigcup_{i=1}^{r} A_i\right| \\ &= n - \sum_{i=1}^{r} |A_i| + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq r} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| - \ldots + (-1)^n |A_1 \cap \ldots \cap A_r|.\end{aligned}$$

Deoarece numerele $p_1, \ldots, p_r$ sunt prime între ele, rezultă că dacă $1 \leq k \leq r$ şi $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq r$ atunci mulţimea $A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}$ conţine toate numerele $1 \leq m \leq p_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r}$ divizibile cu $p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_k}$. Elementele acestei mulţimi sunt numerele $u \cdot p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_k}$ cu $1 \leq u \leq \frac{n}{p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_k}}$, deci $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \cdot \ldots \cdot p_{i_k}}$ de unde rezultă că

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= n - \sum_{i=1}^{r} \frac{n}{p_i} + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq r} \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2}} + \ldots + (-1)^r \frac{n}{p_1 \ldots p_r} \\ &= n \cdot \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).\end{aligned}$$

De exemplu, numărul de întregi strict pozitivi $m < 24$ cu $\gcd(m, n) = 1$ este

$$\varphi(24) = \varphi(2^3 \cdot 3^1) = 24 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 24 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = 8.$$

Numărarea numerelor prime

Ne punem problema numărării numerelor prime mai mici sau egale ca n, unde $n \in \mathbb{N}$. Dacă n nu este prim atunci $n = a \cdot n$ cu $a, b \in \mathbb{N}$ şi $1 < a \leq b$, ceea ce implică $a^2 \leq n$, deci $a \leq \sqrt{n}$. Altfel spus, n trebuie să fie divizibil cu un număr prim $p \leq \sqrt{n}$. Rezultă criteriul următor de numărare a numerelor prime mai mici sau egale ca n:

> Fie $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ şi n_0 numărul de elemente rămase după ce elimină din N multiplii de numere prime $p \leq \sqrt{n}$. n_0 nu este numărul căutat fiindcă (1) nu am numărat numerele prime mai mici sau egale ca n, şi (1) am numărat 1. Deci numărul căutat este $n_0 - r + 1$ unde r este numărul numerelor prime mai mici sau egale ca $\sqrt{n}$.

Exerciţiul 6. Câte numere prime sunt mai mici sau egale ca 120?

Răspuns: Mulţimea numerelor prime $p \leq \sqrt{120}$ este $\{2, 3, 5, 7\}$, deci numărul căutat este $n_0 - 4 + 1 = n_0 + 3$ unde

$$\begin{aligned} n_0 &= \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 120\} \text{ şi } n \text{ nu este multiplu de 2,3,5,7}\} \\ &= 120 - \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 120\} \text{ şi } n \text{ este multiplu de 2,3,5 sau 7}\} \\ &= 120 - |A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7| \end{aligned}$$

unde $A_p = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 120 \text{ şi } n \text{ este multiplu de } p\}$. Conform principiului generalizat al incluziunii şi excluziunii, avem că

$$\begin{aligned} |A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7| &= |A_2| + |A_3| + |A_5| + |A_7| \\ &\quad - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_5| - |A_2 \cap A_7| \\ &\quad - |A_3 \cap A_5| - |A_3 \cap A_7| - |A_5 \cap A_7| \\ &\quad + |A_2 \cap A_3 \cap A_5| + |A_2 \cap A_3 \cap A_7| + |A_2 \cap A_5 \cap A_7| \\ &\quad + |A_3 \cap A_5 \cap A_7| - |A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_7| \\ &= |A_2| + |A_3| + |A_5| + |A_7| \\ &\quad - |A_6| - |A_{10}| - |A_{14}| - |A_{15}| - |A_{21}| - |A_{35}| \\ &\quad + |A_{30}| + |A_{42}| + |A_{70}| + |A_{105}| - |A_{210}| \\ &= 60 + 40 + 24 + 17 - (20 + 12 + 8 + 8 + 5 + 3) \\ &\quad + (4 + 2 + 1 + 1) - 0 = 141 - 56 + 8 = 93 \end{aligned}$$

deci numărul căutat este $(120 - 93) + 3 = 30$. $\square$

1.4.3 Concluzii

Principiul incluziunii şi excluziunii este un criteriu simplu şi puternic de numărare în combinatorica enumerativă, care generalizează regula sumei:

- Dacă A, B sunt două mulţimi finite atunci

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cup B|.$$

- În general, dacă $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sunt mulţimi finite atunci

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| &= |A_1 + |A_2| + \ldots + |A_n| \\ &- |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \ldots \qquad \text{(toate perechile)} \\ &+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \ldots \qquad \text{(toate triplurile)} \\ &\ldots \\ &+ (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|. \end{aligned}$$

1.4.4 Exerciţii

1. Câte şiruri de 7 biţi încep cu 00 sau se termină cu 000?
2. Câte numere întregi cuprinse între 50 şi 1500 inclusiv
   (a) se divid cu 3?
   (b) se divid cu 7?
   (c) se divid cu 7 dar nu se divid cu 3?
   (d) se divid cu 3 sau cu 7?
   (e) nu se divid nici cu 3 şi nici cu 7?
3. Câte numere întregi de la 1 la 999 inclusiv
   (a) se divid cu 7?
   (b) se divid cu 7 şi nu se divid cu 11?
   (c) se divid cu 7 şi 11?
   (d) se divid cu 7 sau 11?
   (e) se divid cu doar unul din numerele 7, 11?
   (f) au cifre distincte?
   (g) sunt pare şi au cifre distincte?
4. Câte numere prime sunt mai mici sau egale ca 101?

5. Într-o clasă sunt 14 fete şi 16 băieţi. Ştim că 22 persoane din clasa respectivă sunt blonde. Care este numărul minim de fete blonde din clasa respectivă?

6. Se consideră mulţimea celor 50 de steaguri ale SUA. Ştim că

   - 30 steaguri au fundal albastru,
   - 12 steaguri au dungi,
   - pe 26 steaguri apare o plantă sau un animal,
   - 9 steaguri au fundal albastru şi dungi,
   - 23 steaguri au fundal albastru şi o plantă sau animal,
   - 3 steaguri au dungi şi o plantă sau animal,
   - un singur steag (California) are dungi şi o plantă sau animal, dar nu are fundal albastru.

   Câte state din SUA au steaguri fără fundal albastru, fără dungi, şi fără plantă sau animal?

7. Câte submulţimi ale mulţimii $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}, \mathtt{e}, \mathtt{1}, \mathtt{2}, \mathtt{3}, \mathtt{4}\}$ conţin cel puţin o literă şi cel puţin o cifră?