Curs 2: Permutări și combinări

Tehnici de generare și enumerare

Cursul 1: recapitulare

- Principiile raționamenului combinatorial sunt: regula produsului și regula sumei.
- Cele mai importante aranjamenet combinatoriale ale unei mulțimi A cu n elemente sunt:
  - r-permutările: $\langle a_1, \ldots, a_r \rangle$ cu $a_i \neq a_j$. A are
  $$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!} \text{ } r\text{-permutări.}$$
  - r-permutările cu repetiție: $\langle a_1, \ldots, a_r \rangle$ unde elementele pot fi egale. A are n^r r-permutări cu repetiție.
  - r-combinările $\{a_1, \ldots, a_r\}$ cu $a_i \neq a_j$. A are
  $$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \text{ } r\text{-combinări.}$$
  - r-combinările cu repetiție $\{a_1, \ldots, a_r\}$ unde elementele pot fi egale. A are $C(n+r-1,r)$ r-combinări cu repetiție.

Cursul 1: recapitulare

Alte aranjamente combinatoriale importante:

- r-permutările cu repetiție ale unei mulțimi $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ în care a_1 apare de r_1 ori, a_2 de r_2 ori, ..., a_n de r_n ori. Numărul acestora este $\frac{r!}{r_1!r_2!\ldots r_n!}$

Exemple

1. Câte șiruri cu cel mult 3 elemente diferite din $\{a, b, c, d\}$ sunt?
2. În câte feluri putem alege 5 bile dintr-o urnă cu bile roșii, galbene, albastre și verzi? Urna are cel puțin 5 bile de fiecare culoare.
3. Câte submulțimi cu cel mult 3 elemente are $\{a, b, c, d, e\}$?
4. Câte șiruri se pot forma rearanjând literele șirului `ALAMA`?

Alte aranjamente combinatoriale importante:

- r-permutările cu repetiție ale unei mulțimi $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ în care a_1 apare de r_1 ori, a_2 de r_2 ori, ..., a_n de r_n ori. Numărul acestora este $\frac{r!}{r_1!r_2!\ldots r_n!}$

Exemple

1. Câte șiruri cu cel mult 3 elemente diferite din $\{a, b, c, d\}$ sunt?
   $P(4,1) + P(4,2) + P(4,3) = 4 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 = 40$
2. În câte feluri putem alege 5 bile dintr-o urnă cu bile roșii, galbene, albastre și verzi? Urna are cel puțin 5 bile de fiecare culoare.
3. Câte submulțimi cu cel mult 3 elemente are $\{a, b, c, d, e\}$?
4. Câte șiruri se pot forma rearanjând literele șirului `ALAMA`?

Alte aranjamente combinatoriale importante:

- r-permutările cu repetiție ale unei mulțimi $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ în care a_1 apare de r_1 ori, a_2 de r_2 ori, ..., a_n de r_n ori. Numărul acestora este $\frac{r!}{r_1!r_2!\ldots r_n!}$

Exemple

1. Câte șiruri cu cel mult 3 elemente diferite din $\{a, b, c, d\}$ sunt?
   $P(4,1) + P(4,2) + P(4,3) = 4 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 = 40$
2. În câte feluri putem alege 5 bile dintr-o urnă cu bile roșii, galbene, albastre și verzi? Urna are cel puțin 5 bile de fiecare culoare.
   $C(4+5-1, 5) = C(8, 5) = 56$
3. Câte submulțimi cu cel mult 3 elemente are $\{a, b, c, d, e\}$?
4. Câte șiruri se pot forma rearanjând literele șirului `ALAMA`?

Alte aranjamente combinatoriale importante:

- r-permutările cu repetiție ale unei mulțimi $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ în care a_1 apare de r_1 ori, a_2 de r_2 ori, ..., a_n de r_n ori. Numărul acestora este $\frac{r!}{r_1!r_2!\ldots r_n!}$

Exemple

1. Câte șiruri cu cel mult 3 elemente diferite din $\{a, b, c, d\}$ sunt?
   $P(4, 1) + P(4, 2) + P(4, 3) = 4 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 = 40$
2. În câte feluri putem alege 5 bile dintr-o urnă cu bile roșii, galbene, albastre și verzi? Urna are cel puțin 5 bile de fiecare culoare.
   $C(4 + 5 - 1, 5) = C(8, 5) = 56$
3. Câte submulțimi cu cel mult 3 elemente are $\{a, b, c, d, e\}$?
   $C(5, 0) + C(5, 1) + C(5, 2) + C(5, 3) = 1 + 5 + 10 + 10 = 26$
4. Câte șiruri se pot forma rearanjând literele șirului `ALAMA`?

Alte aranjamente combinatoriale importante:

- r-permutările cu repetiție ale unei mulțimi $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ în care a_1 apare de r_1 ori, a_2 de r_2 ori, ..., a_n de r_n ori. Numărul acestora este $\frac{r!}{r_1!r_2!\ldots r_n!}$

Exemple

1. Câte șiruri cu cel mult 3 elemente diferite din $\{a, b, c, d\}$ sunt?
   $P(4,1) + P(4,2) + P(4,3) = 4 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 = 40$
2. În câte feluri putem alege 5 bile dintr-o urnă cu bile roșii, galbene, albastre și verzi? Urna are cel puțin 5 bile de fiecare culoare.
   $C(4+5-1, 5) = C(8,5) = 56$
3. Câte submulțimi cu cel mult 3 elemente are $\{a, b, c, d, e\}$?
   $C(5,0) + C(5,1) + C(5,2) + C(5,3) = 1 + 5 + 10 + 10 = 26$
4. Câte șiruri se pot forma rearanjând literele șirului `ALAMA`?
   $\frac{5!}{3!1!1!} = 20$

Vom considera aranjamente combinatoriale de elemente din o mulțime ordonată

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

cu $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$.

- în ordine lexicografică:
  - r-permutări cu și fără repetiție
  - r-combinări
  - r-combinări cu repetiție
- în ordine binară
  - combinări (adică submulțimi)
  - r-combinări (adică submulțimi cu r-elemente)

Considerăm aranjamente combinatoriale cu elemente din $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ cu $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$

- Orice r-combinare C (cu sau fără repetiție) a lui S are o reprezentare lexicografică unică $C = \{s_1, \ldots, s_r\}$ cu $s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq s_r$.
  - Exemple: $\{d, a, c\}$ și $\{a, b, a, d, b\}$ au reprezentările lexicografice $\{a, c, d\}$ și $\{a, a, b, b, d\}$
  - De acum încolo scrie toate combinările în reprezentare lexicografică.
- Două șiruri $s_1 \ldots s_p$ și $s'_1 \ldots s'_q$ se compară lexicografic ca și cuvintele din dicționar: $s_1 \ldots s_p <_{lex} s'_1 \ldots s'_q$ dacă
  1. $s_1 \ldots s_p$ este un prefix al lui $s'_1 \ldots s'_q$, sau
  2. există $1 \leq i \leq \min(p, q)$ astfel încât $s_1 \ldots s_{i-1} = s'_1 \ldots s'_{i-1}$ și $s_i < s'_i$.
- $\langle s_1, \ldots, s_p\rangle <_{lex} \langle s'_1, \ldots, s'_p\rangle$ dacă $s_1 \ldots s_p <_{lex} s'_1 \ldots s'_p$.
- $\{s_1, \ldots, s_p\} <_{lex} \{s'_1, \ldots, s'_q\}$ dacă $s_1 \ldots s_p <_{lex} s'_1 \ldots s'_q$.

Quiz

Q1: Să se enumere în ordine lexicografică permutările $\langle d, a, c, b\rangle, \langle b, c, a, d\rangle, \langle b, a, c, d\rangle$.

Q2: Să se enumere în ordine lexicografică submulțimile $A = \{d, a, e\},\ B = \{c, e, b\},\ C = \{d, b, c\}$.

Quiz

Q1: Să se enumere în ordine lexicografică permutările $\langle d, a, c, b\rangle, \langle b, c, a, d\rangle, \langle b, a, c, d\rangle$.

R1: $\langle b, a, c, d\rangle <_{lex} \langle b, c, a, d\rangle <_{lex} \langle d, a, c, b\rangle$.

Q2: Să se enumere în ordine lexicografică submulțimile $A = \{d, a, e\},\ B = \{c, e, b\},\ C = \{d, b, c\}$.

Quiz

Q1: Să se enumere în ordine lexicografică permutările $\langle d, a, c, b\rangle, \langle b, c, a, d\rangle, \langle b, a, c, d\rangle$.

R1: $\langle b, a, c, d\rangle <_{lex} \langle b, c, a, d\rangle <_{lex} \langle d, a, c, b\rangle$.

Q2: Să se enumere în ordine lexicografică submulțimile $A = \{d, a, e\},\ B = \{c, e, b\},\ C = \{d, b, c\}$.

R2: Mai întâi scriem toate submulțimile folosind reprezentarea lexicografică: $A = \{a, d, e\},\ B = \{b, c, e\},\ C = \{b, c, d\}$.
Apoi le ordonăm lexicografic:
$\{a, d, e\} <_{lex} \{b, c, d\} <_{lex} \{b, c, e\}$, deci $A <_{lex} C <_{lex} B$.

Dacă enumerăm în ordine lexicografică toate aranjamentele combinatoriale de un anumit tip și le numerotăm începând cu 0, obținem rangul lexicografic al fiecărui aranjament.
NOTAŢII FOLOSITE: Dacă $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$ cu $a_1 < \ldots < a_n$ este mulțimea de elemente folosite în aranjamente, atunci

- $rk(p, S) = i - 1$ dacă $p = a_i$
- $rkLex_S(C)$ este rangul lexicografic al aranjamentului combinatorial C
- $nextLex_S(C)$ este aranjamentul combinatorial care urmează imediat după C în ordine lexicografică.

r-permutări ale lui A

rang lexicografic	permutare	2-permutare	1-permutare
0	$\langle a, b, c\rangle$	$\langle a, b\rangle$	$\langle a\rangle$
1	$\langle a, c, b\rangle$	$\langle a, c\rangle$	$\langle b\rangle$
2	$\langle b, a, c\rangle$	$\langle b, a\rangle$	$\langle c\rangle$
3	$\langle b, c, a\rangle$	$\langle b, c\rangle$	—
4	$\langle c, a, b\rangle$	$\langle c, a\rangle$	—
5	$\langle c, b, a\rangle$	$\langle c, b\rangle$	

r-permutări cu repetiție ale lui A

rang lexicografic	$2-$ permutare cu repetiție
0	$\langle a, a\rangle$
1	$\langle a, b\rangle$
2	$\langle a, c\rangle$
3	$\langle b, a\rangle$
$\vdots$	$\vdots$

r-combinări ale lui A

rang lexicografic	3-combinare	2-combinare
0	$\{a, b, c\}$	$\{a, b\}$
1	$\{a, b, d\}$	$\{a, c\}$
2	$\{a, c, d\}$	$\{a, d\}$
3	$\{b, c, d\}$	$\{b, c\}$
4	–	$\{b, d\}$
5	–	$\{c, d\}$

Vom prezenta metode de rezolvare a următoarelor probleme:

Ranking: Să se calculeze rangul $rkLex_S(C)$ al unui anumit tip de aranjament combinatorial.

Unranking: Se dă un număr $k \in \mathbb{N}$. Să se determine C pentru care $rkLex_S(C) = k$.

Enumerare: Să se calculeze $nextLex_S(C)$.

Considerăm $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$ și r-permutarea $\pi = \langle p_1, p_2, \ldots, p_r\rangle$.

- Ranking: $rkLex_S(\pi) = 0$ dacă $\pi = \langle a_1, \ldots, a_r\rangle$. În caz contrar, $rkLex_S(\pi) = i \cdot P(n-1, r-1) + rkLex_{S-\{p_1\}}(\langle p_2, \ldots, p_r\rangle)$ unde $i = rk(p_1, S)$
- Unranking: dacă $k = rkLex_S(\pi)$ atunci
  - Dacă $k = 0$, atunci $\pi = \langle a_1, \ldots, a_r\rangle$.
  - Dacă $k > 0$, fie $i = \lfloor k/P(n-1, r-1)\rfloor$. Atunci $\pi = \langle p_1, p_2, \ldots, p_r\rangle$ unde $rk(p_1, S) = i$ și
  $$k - i \cdot P(n-1, r-1) = rkLex_{S-\{p_1\}}(\langle p_2, \ldots, p_r\rangle)$$
- Enumerare pentru permutări: Dacă $\pi = \langle a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1\rangle$ atunci $nextLex_S(\pi)$ nu există. Altfel, fie $i = \min\{j \mid p_j > p_{j+1} > \ldots > p_n\}$ și $k = \max\{j \mid p_{i-1} < p_j\}$. $nextLex_S(\pi)$ se obține din π în 2 pași:
  1. Se permută locurile lui a_{i-1} și a_k în π, apoi
  2. Se inversează ordinea elementelor $p_i, p_{i+1}, \ldots, p_n$ în π.

Q: Ce rang lexicografic are $\langle 4,2,1,3\rangle$ dacă $S=\{\overset{0}{1},\overset{1}{2},\overset{2}{3},\overset{3}{4},\overset{4}{5}\}$?

R:

$$\begin{aligned}
rkLex_S(\langle 4,2,1,3\rangle) &= 3\cdot P(4,3)+rkLex_{\{1,2,3,5\}}(\langle 2,1,3\rangle)\\
&= 72+rkLex_{\{\overset{0}{1},\overset{1}{2},\overset{2}{3},\overset{3}{5}\}}(\langle 2,1,3\rangle)\\
&= 72+1\cdot P(3,2)+rkLex_{\{1,3,5\}}(\langle 1,3\rangle)\\
&= 72+6+0=78
\end{aligned}$$

Q: Care 4-permutare a lui $S = \{\overset{0}{1}, \overset{1}{2}, \overset{2}{3}, \overset{3}{4}, \overset{4}{5}\}$ are rangul 78?

R: Fie $\pi = \langle p_1, p_2, p_3, p_4 \rangle$ 4=permutarea respectivă.
$n = 5, r = 4$, deci $i = \lfloor 78/P(4,3) \rfloor = \lfloor 78/24 \rfloor = 3$ și
$rk(p_1, S) = 3$. Deci $p_1 = 4$ și
$78 - 3 \cdot 24 = 6 = rkLex_{S'}(\langle p_2, p_3, p_4 \rangle)$ unde $S' = \{1, 2, 3, 5\}$.
$n = 4, r = 3$, deci $i = \lfloor 6/P(3,2) \rfloor = \lfloor 6/6 \rfloor = 1$ și
$rk(p_2, S') = 1$. Deci $p_2 = 2$ și
$6 = 1 \cdot 6 = 0 = rkLex_{S''}(\langle p_3, p_4 \rangle)$ unde $S'' = \{1, 3, 5\}$.
Rezultă că $\langle p_3, p_4 \rangle = \langle 1, 3 \rangle$, deci $\pi = \langle 4, 2, 1, 3 \rangle$.

Q: Care permutare a lui $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ urmează după $\langle 3, 2, 5, 7, 6, 4, 1\rangle$ în ordine lexicografică?

R: Fie $\pi = \langle 3, 2, 5, 7, 6, 4, 1\rangle = \langle p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7\rangle$. Cel mai lung sufix descrescător al lui π este $7, 6, 4, 1$, și începe cu $p_4 = 7$, deci $\min\{j \mid p_j > p_{j+1} > \ldots > p_7\} = i = 4$.
Cel mai din dreapta element din π mai mare decât $p_{i-1} = 5$ este $p_5 = 6$, deci $\max\{j \mid p_j > p_{i-1}\} = k = 5$.

$nextLex_S(\langle 3, 2, 5, 7, 6, 4, 1\rangle)$ se calculează în 2 pași:

1. Schimbăm locurile lui p_{i-1} și p_k în $\pi \Rightarrow \langle 3, 2, 6, 7, 5, 4, 1\rangle$.
2. Inversăm ordinea elementelor p_4, p_5, p_6, p_7 în $\pi \Rightarrow \langle 3, 2, 6, 1, 4, 5, 7\rangle$.

Deci $nextLex_S(\langle 3, 2, 5, 7, 6, 4, 1\rangle) = \langle 3, 2, 6, 1, 4, 5, 7\rangle$.

Considerăm $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$ și r-permutarea cu repetiție $\pi = \langle p_1, p_2, \ldots, p_r\rangle$.

- Ranking: $rkLex_S(\pi) = \sum_{k=1}^{r} rk(p_i, S) \cdot n^{r-i}$
- Unranking: Dacă $\pi = \langle p_1, \ldots, p_r\rangle$ este o r-permutare cu repetiție a lui S cu $rkLex_S(\pi) = k$, atunci putem afla valorile componentelor $p_1, \ldots, p_r$ în felul următor:
  1. Calculăm reprezentarea lui k în baza n cu r cifre: $d_1 d_2 \ldots d_r$
  2. Fiecare p_i satisface condiția $rk(p_i, S) = d_i$.

$S = \{\overset{0}{\mathtt{a}}, \overset{1}{\mathtt{b}}, \overset{2}{\mathtt{c}}, \overset{3}{\mathtt{d}}, \overset{4}{\mathtt{e}}\}$ cu $\mathtt{a} < \mathtt{b} < \mathtt{c} < \mathtt{d} < \mathtt{e}$.

Q1: Ce rang lexicografic are 3-permutarea cu repetiție $\langle \mathtt{d}, \mathtt{d}, \mathtt{a}\rangle$ a lui S?

R1: $rkLex_S(\langle \mathtt{d}, \mathtt{d}, \mathtt{a}\rangle) = \mathtt{rk}(\mathtt{d}, \mathtt{S}) \cdot 5^2 + \mathtt{rk}(\mathtt{d}, \mathtt{S}) \cdot 5^1 + \mathtt{rk}(\mathtt{a}, \mathtt{S}) \cdot 5^0 = 3 \cdot 25 + 3 \cdot 5 + 0 \cdot 1 = 90$.

Q2: Care 5-permutare cu repetiție a lui S are rangul lexicografic 516?

R2: Fie $\pi = \langle p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\rangle$ 5-permutarea cu repetiție cu rangul lexicografic 516.

$$516 = 04031_5$$

Deci $\pi = \langle \mathtt{a}, \mathtt{e}, \mathtt{a}, \mathtt{d}, \mathtt{b}\rangle$

Exemplu pentru $S = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$ cu $\mathtt{a} < \mathtt{b} < \mathtt{c}$:

submulțime C	$\emptyset$	$\{\mathtt{a}\}$	$\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$	$\{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$	$\{\mathtt{a}, \mathtt{c}\}$	$\{\mathtt{b}\}$	$\{\mathtt{b}, \mathtt{c}\}$	$\{\mathtt{c}\}$
$rkLex_S(C)$	0	1	2	3	4	5	6	7

- Ranking: Dacă $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ și $\{s_1, s_2, \ldots, s_r\}$ este reprezentarea lexicografică a lui C atunci
  - dacă $C = \emptyset$ atunci $rkLex_S(C) = 0$.
  - dacă $rk(s_1, S) = i$ (adică $s_1 = a_{i+1}$) atunci $rkLex_S(C) = 1 + 2^n - 2^{n-i} + rkLex_{\{a_{i+2},\ldots,a_n\}}(\{s_2, \ldots, s_r\})$.
- Unranking: Dacă $rkLex_S(C) = k$ atunci
  - dacă $k = 0$ atunci $C = \emptyset$.
  - dacă i satisface condiția $2^n - k < 2^{n-i} \leq 2 \cdot (2^n - k)$, atunci $C = \{a_{i+1}\} \cup C'$ unde $rkLex_{\{a_{i+2},\ldots,a_n\}}(C') = k - 1 - 2^n + 2^{n-i}$

$S = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}, \mathtt{e}, \mathtt{f}\}$ cu $\mathtt{a} < \mathtt{b} < \mathtt{c} < \mathtt{d} < \mathtt{e} < \mathtt{f}$.

Q1: Ce rang lexicografic are submulțimea $\{\mathtt{b}, \mathtt{d}, \mathtt{f}\}$ a lui S?

R1: $S = \{\overset{0}{\mathtt{a}}, \overset{1}{\mathtt{b}}, \overset{2}{\mathtt{c}}, \overset{3}{\mathtt{d}}, \overset{4}{\mathtt{e}}, \overset{5}{\mathtt{f}}\}$ are 6 elemente și $rk(\mathtt{b}, S) = 1$, deci

$$\begin{aligned}
rkLex_S(\{\mathtt{b}, \mathtt{d}, \mathtt{f}\}) &= 1 + 2^6 - 2^5 + rkLex_{\{\mathtt{c},\mathtt{d},\mathtt{e}.\mathtt{f}\}}(\{\mathtt{d}, \mathtt{f}\}) \\
&= 33 + rkLex_{\{\overset{0}{\mathtt{c}},\overset{1}{\mathtt{d}},\overset{2}{\mathtt{e}},\overset{3}{\mathtt{f}}\}}(\{\mathtt{d}, \mathtt{f}\}) \\
&= 33 + 1 + 2^4 - 2^3 + rkLex_{\{\overset{0}{\mathtt{e}},\overset{1}{\mathtt{f}}\}}(\{\mathtt{f}\}) \\
&= 42 + 1 + 2^2 - 2^1 + rkLex_{\emptyset}(\emptyset) \\
&= 45 + rkLex_{\emptyset}(\emptyset) = 45 + 0 = 45.
\end{aligned}$$

$S = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}, \mathtt{e}, \mathtt{f}\}$ cu $\mathtt{a} < \mathtt{b} < \mathtt{c} < \mathtt{d} < \mathtt{e} < \mathtt{f}$.

Q1: Care submulțime a lui S are rangul lexicografic 45?

R1: Fie C submulțimea căutată.

$S = \{\overset{0}{\mathtt{a}}, \overset{1}{\mathtt{b}}, \overset{2}{\mathtt{c}}, \overset{3}{\mathtt{d}}, \overset{4}{\mathtt{e}}, \overset{5}{\mathtt{f}}\}$ are $n = 6$ elemente și
$2^n - 45 = 19 < 2^5 = 32 \leq 2 \cdot (2^n - 45)$, deci i pentru care $n - i = 5$
este $i = 1$, și $C = \{\mathtt{b}\} \cup C'$ unde
$rkLex_{\{\mathtt{c},\mathtt{d},\mathtt{e},\mathtt{f}\}}(C') = 45 - 1 - 2^6 + 2^{6-1} = 12$.

$\{\overset{0}{\mathtt{c}}, \overset{1}{\mathtt{d}}, \overset{2}{\mathtt{e}}, \overset{3}{\mathtt{f}}\}$ are $n = 4$ elemente și
$2^n - 12 = 4 < 2^3 = 8 \leq 2 \cdot (2^n - 12)$, deci i pentru care $n - i = 3$
este $i = 1$, și $C' = \{\mathtt{d}\} \cup C''$ unde
$rkLex_{\{\mathtt{e},\mathtt{f}\}}(C') = 12 - 1 - 2^4 + 2^{4-1} = 3$.

$\{\overset{0}{\mathtt{e}}, \overset{1}{\mathtt{f}}\}$ are $n = 2$ elemente și $2^n - 3 = 1 < 2^1 = 2 \leq 2 \cdot (2^n - 3)$,
deci i pentru care $n - i = 1$ este $i = 1$, și $C'' = \{\mathtt{f}\} \cup C'''$ unde
$rkLex_{\emptyset}(C''') = 3 - 1 - 2^2 + 2^{2-1} = 0$.

Rezultă că $C''' = \emptyset$ și $C = \{\mathtt{b}, \mathtt{d}, \mathtt{f}\}$

- Presupunem că $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ cu $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$.
- Ranking: rangul binar al unei submulțimi $S' \subseteq S$ este

$$rkBin_S(S') = \sum_{i=0}^{n} b_i \cdot 2^{n-i} \quad \text{unde } b_i = \begin{cases} 1 & \text{dacă } a_i \in S', \\ 0 & \text{dacă } a_i \notin S'. \end{cases}$$

- Scriem $S_1 <_{bin} S_2$ dacă $rkBin_S(S_1) < rkBin_S(S_2)$. De exemplu, $rkBin_{\{\mathtt{a},\mathtt{b},\mathtt{c},\mathtt{d}\}}(\{\mathtt{a},\mathtt{c}\}) = 1010_2 = 10$ și

$$\emptyset <_{\mathtt{bin}} \{\mathtt{d}\} <_{\mathtt{bin}} \{\mathtt{c}\} <_{\mathtt{bin}} \{\mathtt{c},\mathtt{d}\} <_{\mathtt{bin}} \ldots <_{\mathtt{bin}} \{\mathtt{a},\mathtt{b},\mathtt{c},\mathtt{d}\}$$

- Unranking: dacă $rkBin_S(S') = k$ și reprezentarea lui k în baza 2 pe n biți este $b_1 b_2 \ldots b_n$, atunci

$$S' = \{a_i \mid 1 \leq i \leq n \text{ și } b_i = 1\}$$

Q1: Ce rang binar are submulțimea $\{\mathtt{b}, \mathtt{d}, \mathtt{e}\}$ a lui $S = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}, \mathtt{e}, \mathtt{f}\}$?

R1: $rkBin_S(\{\mathtt{b}, \mathtt{d}, \mathtt{e}\}) = 010110_2 = 2^4 + 2^2 + 2^1 = 22$.

Q2: Care submulțime a lui $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}, \mathtt{e}, \mathtt{f}\}$ are rangul lexicografic 43?

R2: $43 = 101011_2$, deci submulțimea cu rangul 43 este $\{\mathtt{a}, \mathtt{c}, \mathtt{e}, \mathtt{f}\}$.