Teoria Grafurilor și Combinatorică

Curs 1: Introducere. Tehnici de numărare

Structura cursului

Curs săptămânal: Luni, 11:20-12:50.

- Combinatorică (7 săptămâni):
  - Familiarizarea cu noțiunile de bază ale combinatoricii și cu raționamentul combinatorial.
  - **Cuprins:** Tehnici de numărare, de generare și enumerare; principiul incluziunii și excluziunii; principiul porumbelului; tehnici avansate de numărare; teoria lui Pólya; probleme de ocupare
- Teoria Grafurilor (7 săptămâni):
  - Familiarizarea cu vocabularul teoriei grafurilor, moduri de reprezentare, algoritmi relevanți, aplicații practice.
  - **Cuprins:** Vocabularul teoriei grafurilor; conectivitate; algoritmi de traversare: aplicații; drumuri de lungime minimă; arbori de acoperire; grafuri euleriene și hamiltoniene; rețele de transport; cuplaje; colorabilitate.

Aspecte organizatorice

Curs & seminar/laborator: Mircea Marin

- Classroom: Meet link:
  https://meet.google.com/lookup/g4u3wh3s7j
- Pagina web:
  https://staff.fmi.uvt.ro/~mircea.marin/lectures/TGC
- Evaluare: o medie ponderată
  - 40%: examinări din partea de combinatorică: teme + un examen partial (săptămâna 7)
  - 40%: examinări din partea de teoria grafurilor̆: teme + un examen partial (săptămâna 14)
  - 20%: examen final din ambele părți

Referințe bibliografice

1. M. Marin. Combinatorică și Teoria Grafurilor. Manuscris.
   - Părți din manuscris vor fi distribuite la fiecare curs.
2. J. M. Harris, J. L. Hirst, M. J. Mossinghoff. Combinatorics and Graph Theory. Second Edition. Springer. 2008.
3. Capitolul 5: *Graphs* din
   - R. Sedgewick, K. Wayne. Algorithms, 4th Edition. Addison-Wesley Professional. 2011.

Caută răspuns la întrebarea ,,Cât de multe?" fără să enumere toate alternativele posibile.

REMARCĂ: Metode de enumerare a alternativelor posibile vor fi prezentate în Cursul 2.

Exemple tipice

1. Câte numere diferite se pot reprezenta cu n biți?
2. Câte parole distincte de 7 caractere se pot forma, dacă este permisă doar folosirea cifrelor zecimale și a literelor din mulțimea {a,b,c,d,e,f g,h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z}?
3. Câte ordonări ale unei mulțimi cu n elemente distincte există?
4. Câte submulțimi cu cel mult 3 elemente are o mulțime cu 10 elemente distincte?

Regula produsului. Dacă o procedură poate fi descompusă în o secvență de 2 proceduri astfel încât

- prima se poate efectua în n_1 feluri
- a doua se poate efectua în n_2 feluri

atunci există $n_1 \cdot n_2$ feluri de a efectua acea procedură.

Regula produsului. Dacă o procedură poate fi descompusă în o secvență de 2 proceduri astfel încât

- prima se poate efectua în n_1 feluri
- a doua se poate efectua în n_2 feluri

atunci există $n_1 \cdot n_2$ feluri de a efectua acea procedură.

Regula generalizată a produsului. Dacă o procedură poate fi descompusă în o secvență de m proceduri astfel încât

- prima se poate efectua în n_1 feluri
- a doua se poate efectua în n_2 feluri
- ...
- a m-a se poate efectua în n_m feluri

atunci există $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_m$ feluri de a efectua acea procedură.

Aplicații ale regulii produsului

(1) O companie are 12 birouri și 2 angajați: Gheorghe și Ion. În câte feluri se pot aloca birouri diferite celor doi angajați?

Răspuns

- Alocarea se poate descompune în 2 operații distincte: alocarea unui birou pentru Gheorghe, urmată de alocarea unui birou pentru Ion.
- Există 12 alternative pentru prima operație, deoarece sunt 12 birouri în total.
- Există 11 alternative pentru operația a doua, deoarece biroul alocat lui Gheorghe nu mai este liber.

$\Rightarrow$ conform regulii produsului, sunt $12 \cdot 11 = 132$ variante.

(2) Într-o sală de laborator, scaunele sunt etichetate cu o literă mare urmată de un număr între 1 și 50. Câte scaune pot fi numerotate diferit în felul acesta? Sunt 26 litere mari.

Răspuns: Etichetă $= LN$ cu 26 posibilități pentru L și 50 posibilități pentru $N \Rightarrow 26 \cdot 50 = 1300$ etichete.

(3) Câte șiruri diferite de 7 biți există?

Răspuns: $b_1 b_2 \ldots b_7$ cu $b_i \in \{0, 1\} \Rightarrow 2^7$ șiruri de 7 biți.

(4) Câte funcții $f : \{a_1, \ldots, a_m\} \to \{b_1, \ldots, b_n\}$ există?

Răspuns: Avem de efectuat o secvență de m operații: de fixat valoarea lui $f(a_1)$, apoi ... apoi valoarea lui $f(a_m)$

$\Rightarrow \underbrace{n \cdot \ldots \cdot n}_{m \text{ ori}} = n^m$ funcții.

(5) Câte funcții injective $f : \{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \to \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ există? Observați că trebuie să avem $m \leq n$.

Răspuns: Avem de efectuat o secvență de m operații: de fixat valoarea lui $f(a_1)$, apoi ... apoi de fixat valoarea lui $f(a_m)$.

- Pentru fiecare i: $f(a_i) \in \{b_1, \ldots, b_n\} - \{f(a_1), \ldots, f(a_{i-1})\}$
  $\Rightarrow$ operația i poate fi efectuată în $n - (i-1)$ feluri

$\Rightarrow$ conform regulii produsului, există $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)$ astfel de funcții.

(6) Numărul de submulțimi al unei mulțimi finite $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ este 2^n.

Demonstrație

- Fiecare submulțime B a lui A are o reprezentare binară =șirul de biți $b_1 b_2 \ldots b_n$ cu $b_i = \begin{cases} 1 & \text{dacă } a_i \in B \\ 0 & \text{dacă } a_i \notin B \end{cases}$

  De exemplu, dacă $A = \{a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 4\}$ atunci

Submulțime	Reprezentare binară
$\emptyset$	0000
$\{2\}$	0100
$\{2, 4\}$	0101
$\{1,2,3,4\}$	1111

- Numărul de submulțimi al lui A = numărul de reprezentări binare $b_1 b_2 \ldots b_n = 2^n$.

Regula sumei. Dacă o procedură se poate efectua în 2 feluri, pentru felul i sunt n_i variante, și nici una din variantele de primul fel nu coincide cu vreo variantă de felul 2, atunci există $n_1 + n_2$ variante de a efectua procedura.

Regula generalizată a sumei. Presupunem că o procedură poate fi efectuată în m feluri, pentru felul i sunt n_i variante, și variantele efectuate în feluri diferite sunt diferite.

Atunci există $n_1 + n_2 + \ldots + n_m$ variante de a efectua procedura respectivă.

(1) Un student trebuie să aleagă un proiect de programare din 3 liste. Prima listă conține 9 proiecte, a doua 8, iar a treia 12. Nici un proiect nu apare în mai multe liste. Câte proiecte posibile există?

Răspuns

- Proiectul poate fi ales independent din una din cele 3 liste
- Deoarece nici un project nu apare în mai multe liste, putem aplica regula sumei $\Rightarrow 9 + 8 + 12 = 29$ posibilități.

Multe probleme de numărare nu pot fi rezolvate folosind doar regula sumei sau doar regula produsului, însă pot fi rezolvate dacă folosim ambele reguli.

EXEMPLE

(1) Se știe că o parolă este un șir între 6 și 8 caractere lungime, și că fiecare caracter este fie o literă mare sau o cifră zecimală. Fiecare parolă conține cel puțin o cifră. Câte parole posibile sunt?

Răspuns

- Fie P numărul total de parole, și P_6, P_7 și P_8 numărul de parole cu lungimea 6, 7, sau 8.
- Conform regulii sumei, $P = P_6 + P_7 + P_8$.
- Calculul lui P_m pentru $m \in \{6, 7, 8\}$, se poate face astfel:
  - Fie W_m numărul de șiruri de litere mari și cifre cu lungimea m. Conform regulii produsului, $W_m = (26 + 10)^m = 36^m$
  - Fie N_m numărul de șiruri de litere mari cu lungimea m. Conform regulii produsului, $N_m = 26^m$.
- Se observă ușor că $P_m = W_m - N_m$ (explicați de ce!).

$\Rightarrow$ $P = W_6 - N_6 + W_7 - N_7 + W_8 - N_8 = 36^6 - 26^6 + 36^7 - 26^7 + 36^8 - 26^8$.

(2) În câte feluri putem alege 2 cărți scrise în limbaje diferite dintr-o colecție de 5 cărți scrise în română, 9 scrise în engleză, și 10 în germană?

Răspuns

$$\begin{aligned} \text{R\&E} &= 5 \times 9 = 45 & \text{cf. regulii produsului}\\ \text{R\&G} &= 5 \times 10 = 50 & \text{cf. regulii produsului}\\ \text{E\&G} &= 9 \times 10 = 90 & \text{cf. regulii produsului} \end{aligned}$$

$\Rightarrow 45 + 50 + 90 = 185$ feluri (cf. regulii sumei).

Demonstrații combinatoriale

- O demonstrație combinatorială este o demonstrație care folosește argumente de numărare, precum regula sumei și regula produsului pentru a demonstra ceva.
- Demonstrațiile ilustrate mai devreme sunt combinatoriale.

Presupunem că A este o mulțime finită cu n elemente.

- Un r-aranjament ordonat (sau r-permutare) al lui A este un tuplu $\langle a_1, a_2, \ldots, a_r\rangle$ de elemente distincte din A.
- O r-permutare cu repetiție a lui A este un tuplu $\langle a_1, a_2, \ldots, a_r\rangle \in A^r$ de elemente care se pot repeta.
- O permutare a lui A este o n-permutare $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$ al tuturor elementelor lui A.
- Un r-aranjament neordonat (sau r-combinare) a lui A este o submulțime $\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ cu r elemente a lui A.
- O r-combinare cu repetiție a lui A este un multiset $\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ de r elemente din A care se pot repeta.

Fie $A = \{1, 2, 3\}$.

- $\langle 3, 1, 2\rangle$ și $\langle 1, 3, 2\rangle$ sunt permutări ale lui A.
- $\langle 2, 3, 2, 3\rangle$ și $\langle 3, 3, 3, 1\rangle$ sunt 4-permutări cu repetiție ale lui A.
- $\langle 3, 1\rangle$ și $\langle 1, 2\rangle$ sunt 2-permutări ale lui A.
- 2-combinările lui A sunt submulțimille $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$.
- 2-combinările cu repetiție ale lui A sunt $\{1, 1\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 3\}$.

Notații folosite:

- $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.
- $P(n, r) :=$ nr. de r-permutări ale unei mulțimi cu n elemente.
- $C(n, r) :=$ nr. de r-combinări ale unei mulțimi cu n elemente. Notație alternativă: $\binom{n}{r}$.

Teoremă

$P(n, r) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)$.

DEMONSTRAȚIE

$A = \{a_1, \ldots, a_n\}$

r-permutare $=$ $\langle p_1, p_2, ..., p_r \rangle$ cu $p_1, p_2, \ldots, p_r \in A$ elemente **distincte**.

	subprobleme distincte de selecție			
	$p_1 \in A$	$p_2 \in A - \{p_1\}$	$\ldots$	$p_r \in A - \{p_1, \ldots, p_{r-1}\}$
nr. de posib.	n	$n-1$	$\ldots$	$n-r+1$

$$\Rightarrow P(n, r) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Teoremă

$P(n, r) = C(n, r) \cdot P(r, r)$.

DEMONSTRAŢIE COMBINATORIALĂ

- Enumerarea r-combinărilor unei mulțimi cu n elemente poate fi descompusă în o secvență de 2 activități:
  1. Se selectează r elemente din mulțimea cu n elemente
  2. Se aranjează elementele selectate.
- Există $C(n, r)$ moduri de a selecta r elemente din o mulțime cu n elemente $\Rightarrow$ activitatea (1) se poate face în $C(n, r)$ moduri.
- Există $P(r, r)$ moduri de aranjare a celor r elemente selectate $\Rightarrow$ activitatea (2) se poate face în $P(r, r)$ moduri.

$\Rightarrow$ conform regulii produsului, există $P(n, r) = C(n, r) \cdot P(r, r)$ moduri.

$$C(n, r) = ?$$

- Știm că $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$
- Am demonstrat deja că $P(n, r) = C(n, r) \cdot P(r, r)$

$$\Rightarrow C(n, r) = \frac{P(n, r)}{P(r, r)} = \frac{n!}{(n-r)!} \cdot \frac{0!}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Proprietăți ale combinărilor

Teoremă

$C(n, r) = C(n-1, r-1) + C(n-1, r)$ *pentru toți* $n > r > 0$.

DEMONSTRAȚIE COMBINATORIALĂ

- Fie $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Există $C(n, r)$ moduri de a selecta r elemente din S. Avem 2 cazuri **distincte**:
  1. Selecția celor r elemente din S conține a_1. Fie N_1 numărul de astfel de selecții.
  2. Selecția celor r elemente din S nu conține a_1. Fie N_2 numărul de astfel de selecții.

  Conform regulii sumei, $C(n, r) = N_1 + N_2$. Însă:
  - $N_1 = C(n-1, r-1)$ deoarece N_1 reprezintă numărul de selecții de submulțimi de $r-1$ elemente din $\{a_2, \dots, a_n\}$
  - $N_2 = C(n-1, r)$ deoarece N_2 reprezintă numărul de selecții de submulțimi de r elemente din $\{a_2, \dots, a_n\}$

$\Rightarrow C(n, r) = N_1 + N_2 = C(n-1, r-1) + C(n-1, r)$.

Fie $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ o mulțime finită cu n elemente.

- Numărul de r-permutări cu repetiție al lui A este n^r (conform regulii produsului).
- Orice r-combinare cu repetiție C a lui A poate fi codificată în mod unic ca un șir $\underbrace{* \ldots *}_{k_1 \text{ ori}} | \underbrace{* \ldots *}_{k_2 \text{ ori}} | \ldots | \underbrace{* \ldots *}_{k_n \text{ ori}}$
  unde k_i este numărul de apariții al lui a_i în C.
  De exemplu, dacă $A = \{a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3\}$ atunci
  - $\{1, 1, 2, 3, 3\}$ are codificarea $* * | * | * *$
  - $\{2, 2, 2, 2, 2\}$ are codificarea $| * * * * * |$
- Numărul de r-combinări cu repetiție = numărul de șiruri care conțin $*$ de r ori și $|$ de $n - 1$ ori
  = numărul de șiruri de lungime $r + n - 1$ în care trebuie să alegem r poziții unde să apară $*$
  = $C(n + r - 1, r)$

Q: Câte r-permutări cu repetiție ale lui $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ satisfac următoarea condiție:

a_1 apare de r_1 ori, a_2 apare de r_2 ori, ..., a_n apare de r_n ori?
Observați că $r_1 + r_2 + \ldots + r_n = r$.

R: O r-permutare cu repetiție care satisface această condiție se produce cu în n pași: pornim cu o r-permutare cu repetiție necompletată $\langle \_, \_, \ldots, \_\rangle$ și

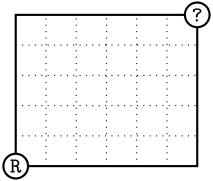
- în pasul 1 alegem r_1 din cele r poziții libere, unde să apară a_1: $C(r, r_1)$ posibilități.
- în pasul 2 alegem r_2 din cele $r - r_1$ poziții libere rămase, unde să apară a_2: $C(r - r_1, r_2)$ posibilități.
- ...
- în pasul n alegem r_2 din cele $r - (r_1 + \ldots + r_{n-1}$ poziții libere rămase, unde să apară a_n: $C(r - r_1 - \ldots - r_{n-1}, r_n)$ posibilități.

Conform regulii produsului, răspunsul este
$C(r, r_1) \cdot C(r - r_1, r_2) \cdot \ldots \cdot C(r - \sum_{i=1}^{n-1} r_i, r_n) = \frac{r!}{r_1!r_2!\ldots r_n!}$

Q1: În câte feluri putem forma un buchet cu 5 trandafiri, dacă avem trandafiri de 3 culori: roșu, galben și alb?

R1: Orice buchet este o 5-combinare cu repetiție a mulțimii $\{R, G, A\}$, de exemplu $\{R, R, R, R, R\}$ (buchet cu 5 trandafiri roșii), etc. $\Rightarrow$ nr. buchete = nr. de 5-combinări cu repetiție ale mulțimii $\{R, G, A\} = C(3+5-1, 5) = C(7, 5) = 21$.

Q2: Un robot poate executa doar două comenzi: să se deplaseze 1 metru la dreapta, sau 1 metru în față. Presupunem că robotul este pus cu fața în sus în colțul din stânga jos al unui teren dreptunghiular de dimensiune $6 \times 5 = 30$ metri pătrați. În câte feluri poate fi comandat robotul să ajungă în colțul din dreapta sus al terenului?



Răspunsuri: orice 11-permutare cu repetiție cu 5 deplasări în față (F) și 6 la dreapta (D).
Exemple:
$\langle \mathtt{F,F,F,D,F,D,D,D,D,D,F} \rangle$
$\langle \mathtt{F,F,D,D,F,F,F,D,D,D,D} \rangle$
Număr posibilități: $\frac{11!}{5!6!} = 462$

Quiz

Q3: Câte șiruri distincte se pot obține reordonând literele șirului $\texttt{SUCCES}$?

R3: Orice reordonare a șirului $\texttt{SUCCES}$ este echivalentă cu o 6-permutare cu repetiție a lui $\{\texttt{S}, \texttt{C}, \texttt{U}, \texttt{E}\}$ în care $\texttt{S}$ apare de 2 ori, $\texttt{C}$ de 2 ori, $\texttt{U}$ și $\texttt{E}$ o dată. Sunt $\frac{6!}{2!2!1!1!} = 180$ asfel de permutări, deci 180 șiruri distincte.

Q4: Câte soluții $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \in \mathbb{N}^n$ are ecuația

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r$$

dacă $r \in \mathbb{N}, r > 1$?

R4: Orice soluție $\langle m_1, m_2, \ldots, m_n \rangle$ a acestei ecuații corespunde unei r-combinări cu repetiție a lui $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ în care fiecare element x_i are multiplicitatea $m_i \Rightarrow C(r + n - 1, n - 1)$ soluții.

Tip	Repetiții	Ordonate?	Formulă
r-permutări	Nu	Da	$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$
r-combinări	Nu	Nu	$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$
r-permutări cu repetiție	Da	Da	n^r
r-permutări cu a_1 de r_1 ori, ... a_n de r_n ori.	Da	Da	$\frac{r!}{r_1!r_2!\dots r_n!}$
r-combinări cu repetiție	Da	Nu	$C(n+r-1,r) = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$

- Dacă $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, definim

$$\binom{n}{n_1, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2! \ldots n_k!}.$$

  Acestea se numesc numere multinomiale.
- Numerele $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ se numesc numere binomiale.
  Observați că $\binom{n}{k} = \binom{n}{k, n-k}$.

Motivul acestor denumiri este dat pe slide-urile următoare.

Numere binomiale și multinomiale

- Numerele binomiale sunt coeficienții din formula binomului

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} y^k$$

- Numerele multinomiale sunt coeficienții din formula

$$(x_1 + \ldots + x_r)^n = \sum_{k_1+\ldots+k_r=n} \binom{n}{k_1, \ldots, k_r} \cdot x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_r^{k_r}$$

Exemple

$$\begin{aligned}(x+y)^3 &= 1 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 y + 3 \cdot x\, y^2 + 1 \cdot y^3\\ (x_1+x_2+x_3)^2 &= 1 \cdot x_1^2 + 1 \cdot x_2^2 + 1 \cdot x_3^2 + \\ &\quad 2 \cdot x_1 x_2 + 2 \cdot x_1 x_3 + 2 \cdot x_2 x_3\end{aligned}$$

$$(x_1 + \ldots + x_r)^n = \sum_{k_1+\ldots+k_r=n}^{n} \frac{n!}{k_1! \ldots k_r!} \cdot x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_r^{k_r}$$

DEMONSTRAŢIE COMBINATORIALĂ

$$(x_1 + \ldots + x_r)^n = \overbrace{(x_1 + \ldots + x_r) \cdot \ldots \cdot (x_1 + \ldots + x_r)}^{n \text{ paranteze}}$$

În câte feluri poate fi produs monomul $x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_r^{k_r}$?

- Alegem k_1 paranteze din care provine $x_1 \Rightarrow C(n, k_1)$ posibilități.
- Alegem k_2 paranteze din care provine $x_2 \Rightarrow C(n - k_1, k_2)$ posibilități.

  ...
- Alegem k_r paranteze din care provine $x_r \Rightarrow C(n - \sum_{i=1}^{r-1} k_i, k_r)$ posibilități.

$\Rightarrow$ cf. regulii produsului, nr. de apariții al lui $x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_r^{k_r}$ în partea dreaptă este $C(n, k_1) C(n - k_1, k_2) \cdot \ldots \cdot C(n - \sum_{i=1}^{r-1} k_i, k_r) = \frac{n!}{k_1! \ldots k_r!}$

Quiz

Q1: Ce coeficient are x^2y^3z în expansiunea lui $(2\,x-y-3\,z)^6$?

R1: $(2\,x-y-3\,z)^6=\sum_{k_1+k_2+k_3=6}\binom{6}{k_1,k_2,k_3}(2\,x)^{k_1}(-y)^{k_2}(-3\,z)^{k_3}$

Singurul termen în care apare x^2y^3z se obține pentru $k_1=2$, $k_2=3$, $k_3=1$ și este

$$\binom{6}{2,3,1}(2x)^2(-y)^3(-3z)^1=\frac{6!}{2!3!1!}\cdot 2^2\cdot(-1)\cdot(-3)\cdot x^2y^3z$$
$$=\frac{720\cdot 4\cdot 3}{2\cdot 6}x^2y^3z=720\,x^2y^3z$$

deci coeficientul lui x^2y^3z este 720.

Q2: Ce coeficient are x^3y^4 în expansiunea binomului $(2\,x+3\,y)^7$?

R2: $(2\,x+3\,y)^7=\sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}(2\,x)^{7-k}(3\,y)^k$.

Singurul termen în care apare x^3y^4 se obține pentru $k=4$ și este ...