1.1 Tehnici de numărare

Teoria numărării caută răspuns la întrebarea ,,Cât de multe?” fără să enumere toate alternativele posibile. Exemple de întrebări de acest gen sunt:

- Câte numere diferite se pot reprezenta cu n biţi?
- Câte parole distincte de 7 caractere se pot forma, dacă este permisă doar folosirea cifrelor zecimale şi a literelor din mulţimea {a,b,c,d,e,f g,h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z}?
- Câte ordonări ale unei mulţimi cu n elemente distincte există?
- Câte submulţimi cu cel mult 3 elemente are o mulţime cu 10 elemente distincte?

În această secţiune sunt prezentate

1. Principiile de numărare ale combinatoricii, cu exemple de utilizare a acestora în raţionamentul combinatorial.
2. Tipuri de aranjamente combinatoriale: permutări şi combinări cu şi fără repetiţie.
3. Formule de calcul al numărului de aranjamente combinatoriale de diferite tipuri, şi exemple de probleme care se rezolvă cu aceste formule.

Deoarece o parte din materialul prezentat în această secţiune necesită nişte cunoştinţe de bază despre mulţimi, puteţi începe prin a citi Anexa A.

1.1.1 Regula produsului şi regula sumei

Regula produsului spune că dacă o procedură poate fi descompusă în o secvenţă de 2 proceduri astfel încât prima se poate efectua în n_1 feluri iar a doua în n_2 feluri, atunci există $n_1 \cdot n_2$ feluri de a efectua acea procedură. Mai general, dacă o procedură p poate fi descompusă în o secvenţă de m proceduri $p_1, \ldots, p_m$ şi fiecare procedură p_i se poate efectua în n_i feluri, atunci p se poate efectua în $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_m$ feluri.

În particular, dacă $A_1, A_2, \ldots, A_m$ mulţimi finite, atunci alegerea unui element $\langle a_1, a_2, \ldots, a_m\rangle$ din $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$ (sau a unui şir $a_1 a_2 \ldots a_m$ cu $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, $\ldots$, $a_m \in A_m$) se descompune în o secvenţă de n operaţii: se alege a_1 din A_1, apoi a_2 din A_2, şi aşa mai departe până se alege a_m din A_m. Conform regulii produsului, $\langle a_1, a_2, \ldots, a_m\rangle$ se poate alege în

$|A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_m|$ feluri. De aici deducem că $|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_m|$.

Exemplul 1. Scaunele unei săli de seminar sunt etichetate cu o literă din alfabetul A de 26 litere al limbii engleze, urmată de un număr întreg pozitiv mai mic sau egal ca 100. Care este numărul maxim de scaune ce pot fi etichetate cu etichete diferite?

RĂSPUNS: O etichetă de scaun este de forma ℓn cu $\ell \in A$ şi $n \in N$, unde N este mulţimea întregilor de la 1 la 100. Conform regulii produsului, sunt $|A| \cdot |N| = 26 \cdot 100 = 2600$ de etichete diferite. Deci răspunsul este 2600. □

Exemplul 2. Câte şiruri diferite de 7 biţi se pot forma?

RĂSPUNS: Un astfel de şir este de forma $b_1b_2b_3b_4b_5b_6b_7$ cu $b_i \in \{0,1\}$ pentru $1 \leq i \leq 7$, Conform regulii produsului, sunt $|\{0,1\}|^7 = 2^7 = 128$ astfel de şiruri. □

Exemplul 3. O serie a unui bilet de tombolă este o secvenţă de trei litere din mulţimea $\{\mathrm{a,b,c,x,y,z}\}$ urmată de o secvenţă de trei cifre zecimale. Care este numărul maxim de bilete de tombolă care pot fi marcate cu serii diferite de acest fel?

RĂSPUNS: O serie de bilet este un şir de forma $\ell_1\ell_2\ell_3d_1d_2d_3$ cu $\ell_1, \ell_2, \ell_3 \in A$ şi $d_1, d_2, d_3 \in D$, unde $A = \{\mathrm{a,b,c,x,y,z}\}$ şi $D = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Conform regulii produsului, sunt $|A|^3 \cdot |D|^3 = 6^3 \cdot 10^3 = 216000$ astfel de serii. Deci numărul căutat este 216000. □

Exemplul 4. Câte funcţii $f : A \to B$ există dacă A şi B sunt finite?

RĂSPUNS: Deoarece A, B sunt mulţimi finite, putem presupune că $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ unde $m = |A|$. Pentru a defini $f : A \to B$ trebuie să alegem valoarea lui $f(a_1)$, apoi pe a lui $f(a_2)$, până la valoarea lui $f(a_m)$. Altfel spus, trebuie ales un şir $b_1b_2 \ldots b_m \in B^m$ care pentru fiecare $1 \leq i \leq m$ ne indică faptul că $f(a_i) = b_i$. De exemplu, dacă $A = \{a_1 = a, a_2 = b, a_3 = c\}$ şi $B = \{1,2,3,4\}$, atunci funcţia

$$f(a) = f(a_1) = 3, \quad f(b) = f(a_2) = 1, \quad f(c) = f(a_3) = 4$$

este reprezentată de şirul $b_1b_2b_3 = 314$.
Conform regulii produsului, sunt $|B|^m = |B|^{|A|}$ şiruri diferite de acest fel. Deci există $|B|^{|A|}$ funcţii $f : A \to B$. □

Exemplul 5. Presupunem că A şi B sunt mulţimi finite şi $|A| \geq |B|$. Câte funcţii injective $f : A \to B$ există?

RĂSPUNS: Fie $|A| = m$, $|B| = n$ şi $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$. Pentru a defini o funcţie injectivă $f : A \to B$ trebuie să alegem

$$\begin{aligned}
f(a_1) &\in B_1 = B, \\
f(a_2) &\in B_2 = B - \{f(a_1)\}, \\
&\vdots \\
f(a_m) &\in B_m = B = \{f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_{m-1})\}
\end{aligned}$$

Conform regulii produsului, sunt $|B_1| \cdot |B_2| \cdot \ldots \cdot |B_m|$ posibilităţi de a defini f în acest fel. Se observă că $|B_i| = n-i+1$ pentru $1 \leq i \leq m$. Deci numărul de funcţii injective $f : A \to B$ este $n(n-1)\ldots(n-m+1)$. □

Exemplul 6. Ce valoare va avea k după ce se execută fragmentul de program de mai jos?

$k := 0;$
for $i_1 := 1$ **to** n_1
    for $i_2 := 1$ **to** n_2
          $\vdots$
        for $i_m := 1$ **to** n_m
            $k := k + 1$

RĂSPUNS: Acest fragment de program este format din m bucle **for** cuibărite. Fiecare incrementare a lui k se produce pentru o valoare diferită a tuplului de valori $(i_1, i_2, \ldots, i_m)$. Deci, numărul de incrementări ale lui k coincide cu numărul de m-tupluri $(i_1, i_2, \ldots, i_m)$ cu $i_1 \in \{1, 2, \ldots, n_1\}$, $i_2 \in \{1, 2, \ldots, n_2\}$, $\ldots$, $i_m \in \{1, 2, \ldots, n_m\}$, adică $n_1 n_2 \ldots n_m$. Doarece valoarea iniţială a lui k este 0, valoarea lui finală va fi $n_1 n_2 \ldots n_m$. □

Exemplul 7. Câte submulţimi are o mulţime finită S?

RĂSPUNS: Fie $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ unde $n = |S|$, şi B_n mulţimea şirurilor de n biţi. Definim funcţia $f : 2^S \to B_n$, $f(A) = b_1 b_2 \ldots b_n$ unde pentru fiecare $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ avem $b_i = 1$ dacă $a_i \in A$ şi $b_i = 0$ dacă $a_i \notin A$. Funcţia f este bijectivă, deci numărul de submulţimi ale lui S este $\left|2^S\right| = |B_n|$. Conform regulii produsului, numărul de şiruri de n biţi este

$$|B_n| = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots 2}_{n \text{ ori}} = 2^n.$$

Deci mulţimea S are $2^n = 2^{|S|}$ submulţimi. □

Regula sumei spune că dacă o procedură se poate efectua în 2 feluri, pentru felul i sunt n_i variante, şi nici una din variantele de primul fel nu coincide cu vreo variantă de felul 2, atunci există n_1+n_2 variante de a efectua procedura. Mai general, dacă o procedură poate fi efectuată în m feluri, pentru felul i sunt n_i variante, şi variantele efectuate în feluri diferite sunt diferite, atunci există $n_1 + n_2 + \ldots + n_m$ variante de a efectua procedura respectivă. □

Exemplul 8. Un student îşi poate alege un proiect din una din trei liste: prima listă conţine 21 propecte, a doua 12 proiecte, şi a treia 18 proiecte. Se presupune că cele listele nu ai proiecte în comun. Câte posibilităţi de a alege un proiect are studentul respectiv?

RĂSPUNS: Conform regulii sumei, sunt $21 + 12 + 18 = 51$ posibilităţi. □

Exemplul 9. Ce valoare are k după ce se execută fragmentul de program de mai jos?

$k := 0$;
for $i_1 := 1$ **to** n_1
  $k := k + 1$
for $i_2 := 1$ **to** n_2
  $k := k + 1$
  ⋮
for $i_m := 1$ **to** n_m
  $k := k + 1$

RĂSPUNS: Fragmentul de program este o secvenţă de m bucle **for**. Pentru fiecare $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, fie T_j mulţimea de execuţii a buclei pentru variabila i_j. Se observă că $|T_j| = n_j$ pentru toţi $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ şi că fiecare execuţie a unei bucle incrementează valoarea lui k. Deci numărul de incrementări a variabilei k coincide cu numărul N de posibilităţi de a executa o buclă. Conform regulii sumei

$$N = |T_1| + |T_2| + \ldots + |T_m| = n_1 + n_2 + \ldots + n_m.$$

k are valoarea iniţială 0 şi este incrementat de N ori, deci valoarea lui k va fi $N = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$. □

Numeroase probleme de numărare se pot rezolva combinând regula sumei cu regula produsului.

Exemplul 10. Un elev are de citit două cărţi în limbi diferite, şi poate alege cărţile respective din o colecţie care conţine 10 cărţi în limba engleză, 11 cărţi în limba franceză şi 12 cărţi în limba germană. Câte posibilităţi de a-şi îndeplini sarcina are elevul respectiv?

RĂSPUNS: Sarcina elevului este un şir de 2 operaţii: (1) să aleagă două limbi diferite din mulţimea de limbi disponibile $L = \{\mathrm{E}, \mathrm{F}, \mathrm{G}\}$ unde E, F, G reprezintă limbile engleză, franceză şi germană, şi (2) să aleagă câte o carte pe care s-o citească în fiecare limba aleasă. Pentru prima operaţie are 3 posibilităţi: {E,F}, {E,G} şi {F,G}. Conform regulii sumei, numărul de posibilităţi de a-şi îndeplini sarcina este $N_{\{\mathrm{E,F}\}} + N_{\{\mathrm{E,G}\}} + N_{\{\mathrm{F,G}\}}$ unde $N_{\{X,Y\}}$ este numărul de posibilităţi de a citi o carte în limba X şi altă carte în limba Y. Conform regulii produsului $N_{\{X,Y\}} = N_X \cdot N_Y$ unde N_X este numărul de cărţi în limba X şi N_Y este numărul de cărţi în limba Y. Rezultă că $N_{\{\mathrm{E,F}\}} = 10 \cdot 11$, $N_{\{\mathrm{E,G}\}} = 10 \cdot 12$ şi $N_{\{\mathrm{F,G}\}} = 11 \cdot 12$. Deci elevul are $110 + 120 + 132 = 362$ posibilităţi să-şi îndeplinească sarcina. □

Exemplul 11. Parolele de acces la un calculator sunt şiruri de 6, 7 sau 8 caractere care pot fi litere din alfabetul englez A de 26 de litere, sau cifre zecimale din mulţimea $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Fiecare parolă trebuie să conţină cel puţin o cifră. Câte parole diferite de acest fel se pot forma?

RĂSPUNS: Fie P_m mulţimea parolelor de lungime m. Ştim că $m \in \{6, 7, 8\}$. Conform regulii sumei, numărul de parole care se poate forma este $|P_6| + |P_7| + |P_8|$. Fie S_m mulţimea şirurilor de m caractere din $A \cup D$. Conform regulii produsului, $|S_m| = |A \cup D|^m = (|A| + |D|)^m = 36^m$. Deasemenea, $|S_m| = |P_m| + |S_m - P_m|$ fiindcă $S_m = P_m \cup (S_m - P_m)$ şi $P_m \cap (S_m - P_m) = \emptyset$. Rezultă că $|P_m| = |S_m| - |S_m - P_m| = 36^m - |S_m - P_m|$.

$S_m - P_m$ este mulţimea şirurilor de m caractere care nu sunt parole, adică nu conţin nici o cifră. Altfel spus, $S_m - P_m$ este mulţimea şirurilor de m caractere din A. Conform regulii produsului $S_m - P_m$ are 26^m caractere.

Aşadar $P_m = 36^m - 26^m$ pentru $m \in \{6, 7, 8\}$, deci numărul căutat este $|P_6| + |P_7| + |P_8| = (36^6 + 36^7 + 36^8) - (26^6 + 26^7 + 26^8)$. □

1.1.2 Tipuri de aranjamente combinatoriale

În această secţiune presupunem că S este o mulţime finită cu n elemente, şi vom considera următoarele tipuri de aranjamente:

- un **aranjament ordonat** (sau **permutare**) al elementelor lui S este un n-tuplu $\pi = \langle p_1, p_2, \ldots, p_n \rangle \in S^n$ cu $p_i \neq p_j$ pentru orice $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$. De exemplu, $\langle a, c, b \rangle$ şi $\langle b, a, c \rangle$ sunt permutări ale mulţimii $\{a, b, c\}$.

- Dacă $r \leq n$, un r-**aranjament ordonat** (sau r-**permutare**) al elementelor lui S este un r-tuplu $\pi = \langle p_1, p_2, \ldots, p_k \rangle$ cu $p_i \in S$ şi $p_i \neq p_j$ pentru orice $i, j \in \{1, 2, \ldots, r\}$, $i \neq j$. De exemplu, $\langle 2, 1, 4 \rangle$ şi $\langle 4, 2, 1 \rangle$ sunt 3-permutări ale mulţimii $\{1, 2, 3, 4\}$.

- un r-**aranjament ordonat cu repetiţie** (sau r-**permutare cu repetiţie**) al elementelor lui S este un r-tuplu $\langle s_1, s_2, \ldots, s_r \rangle \in S^r$.
- un **aranjament neordonat** (sau **combinare**) al lui S este o submulţime a lui S. De pildă, combinările lui $\{1, 2\}$ sunt $\emptyset, \{1\}, \{2\}$, $\{1, 2\}$.
- Dacă $r \leq n$, un r-**aranjament neordonat** (sau r-**combinare**) a lui S este o submulţime cu r elemente a lui S. De exemplu, 2-combinările lui $\{a, b, c\}$ sunt $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$.
- un r-**aranjament neordonat cu repetiţie** (sau r-**combinare cu repetiţie**) al elementelor lui S este un multiset $\{s_1, s_2, \ldots, s_r\}$ cu $s_i \in S$ pentru toţi $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$.

Reamintim faptul că un **multiset** este o structură de date asemănătoare cu o mulţime, însă în care fiecare element poate să apară de mai multe ori. Numărul de apariţii al unui element într-un multiset se numeşte *multiplicitatea* elementului respectiv. De exemplu, $\{1, 1, 2, 4\}$ este un multiset în care elementul 1 are multiplicitatea 2, iar elementele 2 şi 4 au multiplicitatea 1. Două multiseturi sunt **egale** dacă conţin aceleaşi elemente, iar elementele au aceeaşi multiplicitate. De exemplu. $\{1, 2, 2, 4\} = \{2, 1, 4, 2\}$, dar $\{1, 2, 4\} \neq \{1, 2, 2, 4\}$.

În subsecţiunile următoare vom determina formule de calcul al numărului de aranjamente de fiecare tip. Reamintim faptul că în combinatorică se foloseşte notaţia $n!$ pentru a denota produsul de numere $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Deasemenea, se consideră că $0! = 1$. În general, valoarea lui $n!$ pentru $n \in \mathbb{N}$ se numeşte **factorialul** lui n.

Permutări şi r-permutări

Orice r-permutare $\langle p_1, p_2, \ldots, p_r \rangle$ a elementelor unei mulţimi finite S cu n elemente corespunde unei funcţii $\pi : \{1, 2, \ldots, r\} \to S$ cu $\pi(i) = p_i$. Am demonstat în Exemplul 5 de la pagina 4 că numărul de astfel de funcţii π este $n\,(n-1) \cdots (n-r+1)$. Deci

Numărul de r-permutări al unei mulţimi cu n elemente este

$$P(n, r) = n\,(n-1) \cdots (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} \tag{1.1}$$

Orice permutare a lui S este o n-permutare, deci

Numărul de permutări al unei mulţimi cu n elemente este

$$P(n, n) = n\,(n-1) \cdots 1 = n!$$

Exemplul 12. Se consideră alfabetul A de 26 litere latine mici de la `a` la `z`. Câte şiruri diferite de trei litere din A se pot forma?

RĂSPUNS: $P(26,3) = 26!/(26-3)! = 26 \cdot 25 \cdot 24 = 15600$. □

Exemplul 13. În câte feluri pot fi puşi într-un rând n bărbaţi şi n femei astfel încât să nu fie două femei una lângă alta?

RĂSPUNS: Un astfel de rând fie începe cu un bărbat, adică este un şir de forma $b_1 f_1 b_2 f_2 \ldots b_n f_n$, sau începe cu o femeie, adică este de forma $f_1 b_1 f_2 b_2 \ldots f_n b_n$, unde $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ este mulţimea celor n bărbaţi, iar $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ este mulţimea celor n femei. Fiecare şir de acest fel este determinat de în mod unic de o pereche de permutări $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle$ unde $\pi_1 = \langle b_1, b_2, \ldots, b_n \rangle$ a lui B, iar $\pi_2 = \langle f_1, f_2, \ldots, f_n \rangle$ este o permutare a lui F. Conform regulii produsului, sunt $n! \cdot n! = (n!)^2$ şiruri de forma $b_1 f_1 b_2 f_2 \ldots b_n f_n$, şi $n! \cdot n! = (n!)^2$ şiruri de forma $f_1 b_1 f_2 b_2 \ldots f_n b_n$.

Conform regulii sumei, numărul căutat este $(n!)^2 + (n!)^2 = 2\,(n!)^2$. □

r-permutări cu repetiţie

O r-permutare cu repetiţie a elementelor unei mulţimi finite S cu $|S| = n$ elemente este un r-tuplu $\langle s_1, s_2, \ldots, s_r \rangle$ cu $s_i \in S$ pentru toţi $u \in \{1, 2, \ldots, r\}$. Conform regulii produsului

O mulţime cu n elemente are n^r r-permutări cu repetiţie.

O versiune constrânsă a r-permutărilor cu repetiţie apare în rezolvarea problemei următoare:

Fie $r_1, r_2, \ldots, r_n, r \in \mathbb{N}$ astfel încât $r_1 + r_2 + \ldots + r_n = r$. Câte r-permutări cu repetiţie π satisfac constrângerea că fiecare a_i apare în π de r_i ori?

Vom folosi notaţia $\binom{r}{r_1, r_2, \ldots, r_n}$ pentru a ne referi la acest număr.

De exemplu, dacă $S = \{a, b\}$, $r = 4$ şi $r_1 = r_2 = 2$, atunci 4-permutările cu repetiţie ale lui S care conţin a de 2 ori şi b de 2 ori sunt

$$\langle a,a,b,b \rangle, \langle a,b,a,b \rangle, \langle a,b,b,a \rangle, \langle b,a,a,b \rangle, \langle b,a,b,a \rangle, \langle b,b,a,a \rangle$$

deci $\binom{4}{2,2} = 6$. Vom demonstra că, în general

$$\boxed{\binom{r}{r_1, r_2, \ldots, r_n} = \frac{r!}{r_1! r_2! \cdot \ldots \cdot r_n!}} \tag{1.2}$$

DEMONSTRAŢIE COMBINATORIALĂ. Fie $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ o mulţime finită cu n elemente, şi $\pi = \langle s_1, s_2, \ldots, s_r \rangle$ o n-permutare cu repetiţie în care fiecare a_i apare de r_i ori. π se poate determina în mod unic efectuând un şir $o_1 o_2 \ldots o_n$ de n operaţii:

o_1: se alege o r_1-combinare C_1 a lui $\{1, 2, \ldots, r\}$ pentru poziţiile lui a_1 în π. Operaţia o_1 se poate face în $C(r, r_1)$ feluri.

o_2: se alege o r_2-combinare C_2 a lui $\{1, 2, \ldots, r\} - C_1$ pentru poziţiile lui a_2 în π. Operaţia o_2 se poate face în $C(r - r_1, r_2)$ feluri.

o_3: se alege o r_3-combinare C_3 a lui $\{1, 2, \ldots, r\} - (C_1 \cup C_2)$ pentru poziţiile lui a_3 în π. Operaţia o_3 se poate face în $C(r - r_1 - r_2, r_3)$ feluri.

...

o_n: se alege o r_n-combinare C_n a lui $\{1, 2, \ldots, r\} - (C_1 \cup \ldots \cup C_{n-1})$ pentru poziţiile lui a_n în π. Se observă că $\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ este o partiţie a lui $\{1, 2, \ldots, r\}$, deci $C_n = \{1, 2, \ldots, n\} - (C_1 \cup \ldots \cup C_{n-1})$, de unde deducem că operaţia o_n se poate efectua într-un singur fel.

Conform regulii produsului, $\binom{r}{r_1, r_2, \ldots, r_n}$ este egal cu

$$C(r, r_1) \cdot C(r - r_1, r_2) \cdot C(r - r_1 - r_2, r_3) \cdot \ldots \cdot C\left(r - \sum_{i=1}^{n-1} r_i, r_n\right) =$$

$$\frac{r!}{r_1!(r - r_1)!} \cdot \frac{(r - r_1)!}{r_2!(r - r_1 - r_2)!} \cdot \ldots \cdot \frac{\left(n - \sum_{i=1}^{n-1} r_i\right)!}{r_n! 0!} = \frac{r!}{r_1! r_2! \cdot \ldots \cdot r_n!}. \quad \square$$

Exemplul 14. Numerele de inventar al obiectelor din un depozit sunt şiruri de trei litere diferite din mulţimea $\{\mathtt{A}, \mathtt{B}, \mathtt{C}, \mathtt{D}, \mathtt{E}\}$ urmate de două cifre zecimale. Câte numere de inventar de acest fel se pot forma?

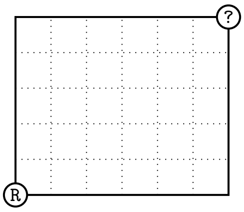
RĂSPUNS: Un număr de inventar este $L_1 L_2 L_3 N_1 N_2$ unde $\langle L_1, L_2, L_3\rangle$ este o 3-permutare a lui $\{\mathtt{A}, \mathtt{B}, \mathtt{C}, \mathtt{D}, \mathtt{E}\}$ iar $\langle N_1, N_2\rangle$ este o 2-permutare cu repetiţie a mulţimii cifrelor zecimale. $\langle L_1, L_2, L_3\rangle$ se poate alege în $P(5, 3) = 5 \cdot 4 = 20$ feluri, iar $\langle N_1, N_2\rangle$ în $10^2 = 100$ feluri. Conform regulii produsului, se pot forma $20 \cdot 100 = 2000$ de astfel de numere de inventar. $\square$

Exemplul 15. Câte şiruri diferite se pot forma dacă se permută literele şirului `SUCCES`?

RĂSPUNS: Fiecare şir este de forma $s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 s_6$ unde $\langle s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\rangle$ este o 6-permutare cu repetiţie a lui $\{\mathtt{S}, \mathtt{U}, \mathtt{C}, \mathtt{E}\}$ în care $\mathtt{S}, \mathtt{C}$ apar de 2 ori, şi $\mathtt{U}, \mathtt{E}$ apar o dată. Sunt $\binom{6}{2,2,1,1} = \frac{6!}{2!2!1!1!} = 90$ astfel de şiruri. $\square$

Exemplul 16. Un roboţel poate executa doar două comenzi: să se deplaseze 1 metru la dreapta, sau 1 metru în faţă. Presupunem că roboţelul este pus cu faţa în sus în colţul din stânga jos al unui teren dreptunghiular de dimensiune $6 \times 5 = 30$ metri pătraţi. În câte feluri poate fi comandat roboţelul să ajungă în colţul din dreapta sus al terenului?

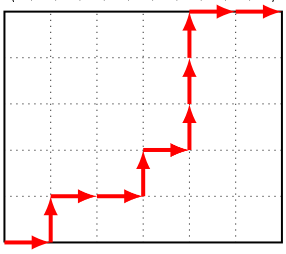
Răspuns. Situaţia descrisă în problemă este ilustrată în figura de mai jos:



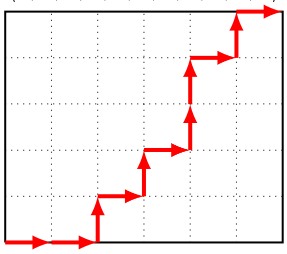
Dreptunghiul caroiat de dimensiune 6×5 este terenul, iar Ⓡ este roboţelul dn colţul stânga jos. Roboţelul poate fi comandat să ajungă în colţul dreapta sus cu un şir de 11 comenzi $o_1 o_2 \ldots o_{11}$ care trebuie să conţină 6 deplasări la dreapta (D) şi 5 deplasări în faţă (F). Altfel spus, $\langle o_1 o_2, \ldots, o_{11} \rangle$ este o 11-permutare cu repetiţie a lui $\{\mathtt{D}, \mathtt{F}\}$ în care D apare de 6 ori şi F apare de 5 ori. Numărul total de astfel de şiruri de comenzi este $\frac{11!}{5!6!} = C(11, 5) = 462$.

De exemplu, $\langle \mathtt{D}, \mathtt{F}, \mathtt{D}, \mathtt{D}, \mathtt{F}, \mathtt{D}, \mathtt{F}, \mathtt{F}, \mathtt{F}, \mathtt{D}, \mathtt{D} \rangle$ şi $\langle \mathtt{D}, \mathtt{D}, \mathtt{F}, \mathtt{D}, \mathtt{F}, \mathtt{D}, \mathtt{F}, \mathtt{F}, \mathtt{D}, \mathtt{F}, \mathtt{D} \rangle$ sunt 11-permutări cu repetiţie de acest fel, iar traiectoriile parcurse de roboţel când primeşte aceaste secvenţe de comenzi sunt cele ilustrate mai jos:

Traiectorie determinată de secvenţa de comenzi $\langle \mathtt{D}, \mathtt{F}, \mathtt{D}, \mathtt{D}, \mathtt{F}, \mathtt{D}, \mathtt{F}, \mathtt{F}, \mathtt{F}, \mathtt{D}, \mathtt{D} \rangle$



Traiectorie determinată de secvenţa de comenzi $\langle \mathtt{D}, \mathtt{D}, \mathtt{F}, \mathtt{D}, \mathtt{F}, \mathtt{D}, \mathtt{F}, \mathtt{F}, \mathtt{D}, \mathtt{F}, \mathtt{D} \rangle$



□

Combinări şi r-combinări

Am demonstrat în Exemplul 7 de la pagina 5 că

O mulţime cu n elemente are 2^n submulţimi.

În cele ce urmează vom determina o formulă de calcul a numărului de r-combinări al unei mulţimi cu n elemente. Notaţia folosită pentru a ne referi la acest număr este $C(n, r)$ sau $\binom{n}{r}$. Mai întâi demonstrăm că

$$\boxed{P(n, r) = C(n, r) \cdot P(r, r). \qquad (1.3)}$$

Demonstraţie: Fie S o mulţime cu n elemente, A mulţimea submulţimilor cu r elemente ale lui S, şi B_C mulţimea permutărilor unei submulţimi C a lui A. Orice r-permutare π a unei mulţimi S cu n elemente este determinată în mod unic de un şir $o_1 o_2$ de două operaţii:

o_1: se alege o submulţime C cu r elemente din A. A are n elemente, deci sunt $C(n, r)$ posibilităţi de a efectua operaţia o_1.

o_2: π se obţine alegând o r-permutare a mulţimii C. C are r elemente, deci sunt $P(r, r)$ posibilităţi de a efectua operaţia o_2.

Conform regulii produsului, numărul de r-permutări π ale elementelor lui S coincide cu $C(n, r) \cdot P(r, r)$, adică, $P(n, r) = C(n, r) \cdot P(r, r)$. □

O consecinţă imediată a acestui rezultat este că

Numărul de r-combinări al unei mulţimi cu n elemente este

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{P(r, r)} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \tag{1.4}$$

De exemplu, 2-combinările mulţimii $S = \{a, b, c\}$ sunt $\{a, b\}$, $\{a, c\}$ şi $\{b, c\}$, iar formula (1.4) ne spune că numărul de 2-combinări ale mulţimii S este $C(3, 2) = \frac{3!}{2!1!} = 3$.

Exemplul 17. Câte submulţimi cu cel mult 3 elemente are mulţimea $S = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}, \mathtt{e}\}$?

RĂSPUNS: Comform regulii sumei, acest număr este $N_0 + N_1 + N_2 + N_3$ unde N_r este numărul submulţimilor lui S cu r elemente, adică al r-combinărilor lui S. Deoarece $N_r = C(5, r) = \frac{5!}{r!(5-r)!}$, rezultă că numărul căutat este

$$\frac{5!}{0!5!} + \frac{5!}{1!4!} + \frac{5!}{2!3!} + \frac{5!}{3!2!} = 1 + 5 + 10 + 10 = 26.$$ □

Exemplul 18. La o tombolă cu biletele numerotate de la 1 la 100 se alege un bilet câştigător de 1000 lei şi două bilete câştigătoare de 300 lei.

a) În câte feluri se pot alege biletele câştigătoare?

b) În câte feluri se pot alege biletele câştigătoare dacă se ştie că se acordă 300 lei unui bilet cu număr mai mic ca 11?

RĂSPUNS: Fie N mulţimea numerelor de la 1 la 100.

a) Orice alegere de bilete câştigătoare este unic determinată de un şir de operaţii $o_1 o_2$, unde: (1) o_1 selectează un număr de bilet $n \in N$ pentru câştigul de 1000 lei. o_1 se poate efectua în 100 feluri; (2) o_2

selectează două numere de bilet din $N - \{n\}$ (adică o 2-combinare a lui $N - \{n\}$) pentru câştigurile de 300 lei. o_2 se poate efectua in $C(99, 2) = 98 \cdot 99/2 = 4851$ feluri.

Conform regulii produsului, biletele câştigătoare se pot alege în $100 \cdot 4851 = 485100$ feluri.

b) Distingem două cazuri distincte:

1) Ambele câştiguri de 300 lei sunt pentru bilete cu număr mai mic ca 11. În acest caz alegem două numere be bilet n_1, n_2 mai mici ca 11 pentru câştigurile de 300 lei, şi apoi alegem un număr de bilet n_3 din mulţimea $N - \{n_1, n_2\}$ pentru câştigul de 1000 lei. Mulţimea $\{n_1, n_2\}$ poate fi aleasă în $C(10, 2) = 9 \cdot 10/2 = 45$ feluri, iar n_3 poate fi ales în 98 feluri. Conform regulii produsului, acest caz se poate produce în $45 \cdot 98 = 4410$ feluri.
2) Al doilea câştig de 300 lei se acordă unui bilet cu număr mai mare sau egal ca 11. În acest caz alegem mai întâi un număr n_1 mai mic ca 10 pentru un câştig de 300 lei, apoi alt număr n_2 între 11 şi 100 pentru un câştig de 300 lei, şi în final un număr $n_3 \in N - \{n_1, n_2\}$ pentru câştigul de 1000 lei. Conform regulii produsului, avem $10 \cdot 90 \cdot 98 = 88200$ posibilităţi.

Conform regulii sumei, numărul căutat este $4410 + 88200 = 92610$. □

Exemplul 19. Câte 4-combinari ale mulţimii de numere de la 1 la 50 au două elemente mai mici ca 6 şi un element mai mare ca 45?

RĂSPUNS, O astfel de 4-combinare este de forma $C \cup \{n_1, n_2\}$ unde

- C este o 2-combinare a mulţimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, deci poate fi aleasă în $C(5, 2) = 10$ feluri.
- n_1 este între 6 şi 45, deci poate fi ales în $45 - 6 + 1 = 40$ feluri.
- n_2 este între 46 şi 50, deci poate fi ales în $50 - 46 + 1 = 5$ feluri.

Conform regulii sumei, avem $10 + 40 + 5 = 55$ astfel de 4-combinări. □

r-combinări cu repetiţie

Fie $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$ o mulţime cu n elemente, şi M or r-combinare cu repetiţie a mulţimii S. Fie m_i multiplicităţile elementelor a_i în M. Atunci

$m_1 + m_2 + \ldots + m_n = r$ iar r-combinarea M poate fi reprezentată în mod unic cu şirul de biţi

$$s_M = \underbrace{0\ldots0}_{m_1 \text{ ori}}1\underbrace{0\ldots0}_{m_2 \text{ ori}}1\cdots1\underbrace{0\ldots0}_{m_n \text{ ori}}$$

De exemplu, dacă $S = \{a_1 = a, a_2 = b, a_3 = c\}$ atunci codificările 6-combinărilor cu repetiţie $\{a, a, a, b, c, c\}$ şi $\{a, c, c, c, c, c\}$ sunt 00010100 şi 01100000. Se observă că fiecare codificare a unei r-combinări cu repetiţie este un şir de biţi în care numărul de apariţii al lui 0 este $m_1+m_2+\ldots+m_n = r$, iar numărul de apariţii al bitului 1 este $n - 1$. Deci mulţimea codificărilor posibile ale unei r-combinări cu repetiţie coincide cu mulţimea şirurilor de lungime $r + n - 1$ în care 0 apare de r ori iar 1 apare de $n - 1$ ori. Fie C această mulţime de şiruri. Rezultă că numărul r-combinărilor cu repetiţie al lui S este $|C|$, şi maii rămâne să găsim o formulă de calcul pentru $|C|$.

Orice şir $s \in C$ are lungimea $r+n-1$, şi pentru a-l determina trebuie să alegem doar poziţiile din şir unde apare bitul 1. Avem de ales $n - 1$ poziţii unde să apară 1 în s. Altfel spus, avem de ales o $(n - 1)$-combinare din mulţimea de poziţii $\{1, 2, \ldots, r + n - 1\}$ a şirului s. Numărul de $(n - 1)$-combinări al acestei mulţimi de poziţii este $C(r+n-1, n-1)$, deci s poate fi determinat în $C(r+n-1, n-1)$ feluri. Altfel spus, $|C| = C(r+n-1, n-1)$. Prin urmare

O mulţime cu n elemente are $C(r + n - 1, n - 1)$ r-combinări cu repetiţie.

Exemplul 20. În câte feluri putem alcătui un buchet de 7 trandafiri dacă avem la dispoziţie trandafiri roşii, albi şi galbeni?

RĂSPUNS: Avem $n = 3$ culori posibile: roşu (`R`), alb (`A`) şi galben (`G`). Un buchet este o 7-combinare cu repetiţie a mulţimii $\{\mathtt{R}, \mathtt{A}, \mathtt{G}\}$ de culori posibile ale trandafirilor. Rezultă că putem forma

$C(7 + 3 - 1, 3 - 1) = \dfrac{9!}{2!7!} = 36$ buchete. □

Exemplul 21. Câte soluţii $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle \in \mathbb{N}^n$ are ecuaţia

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r \tag{1.5}$$

dacă $r \in \mathbb{N}, r > 1$?

RĂSPUNS: Orice soluţie $\langle m_1, m_2, \ldots, m_n\rangle$ a acestei ecuaţii corespunde unei r-combinări cu repetiţie a lui $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ în care fiecare element x_i are multiplicitatea m_i. Numărul de r-combinări cu repetiţie ale lui X care satisfac această condiţie este $C(r + n - 1, n - 1)$, deci ecuaţia (1.5) are $C(r + n - 1, n - 1)$ soluţii. □

1.1.3 Coeficienţi binomiali

Notaţia $C(n,r)$ reprezintă numărul de r-combinări (adică submulţimi cu r elemente) ale unei mulţimi cu n elemente. Am văzut că $C(n,r) = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$. Se observă uşor că această formulă este simetrică în r şi $n-r$, adică

$$C(n,r) = C(n,n-r). \tag{1.6}$$

Numerele $C(n,r)$ se numesc **coeficienţi binomiali** fiindcă apar în formula de calcul al expansiunii binomului $(x+y)^n$:

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} C(n,r) x^r y^{n-r}. \tag{1.7}$$

De exemplu

$$\begin{aligned}(x+y)^3 &= \sum_{r=0}^{3} x^r y^{n-r} = C(3,0)y^3 + C(3,1)x\,y^2 + C(3,2)x^2\,y + C(3,3)y^3\\ &= y^3 + 3\,x\,y^2 + 3\,x^2 y + x^3.\end{aligned}$$

O demonstraţie combinatorială simplă a formulei (1.7) este următoarea:

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)\cdot(x+y)\cdot\ldots\cdot(x+y)}_{n \text{ ori}}$$

Expansiunea acestui produs are termeni de forma $u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_n$ unde

$u_1 \in \{x,y\}$ este ales din primul termen $x+y$ al produsului,
$u_2 \in \{x,y\}$ este ales din al doilea termen $x+y$ al produsului,
...
$u_n \in \{x,y\}$ este ales din ultimul termen $x+y$ al produsului.

Fiecare astfel de produs este egal cu un termen $x^r y^{n-r}$ cu $0 \leq r \leq n$. Deasemenea, $u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_n = x^r y^{n-r}$ dacă şi numai dacă x apare de r ori în n-tuplul $\langle u_1, u_2, \ldots, u_n\rangle$. Sunt $C(n,r)$ posibilităţi de a alege r poziţii unde să apară x în $\langle u_1, u_2, \ldots, u_n\rangle$. Deci $x^r y^{n-r}$ apare de $C(n,r)$ ori în expansiunea binomului $(x+y)^n$, şi prin urmare coeficientul lui $x^r y^{n-r}$ este $C(n,r)$. $\square$

Proprietăţi ale coeficienţilor binomiali

Ştim deja că $C(n,r) = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ şi $C(n,r) = C(n,n-r)$.

$$\boxed{\sum_{r=0}^{n} C(n,r) = 2^n. \qquad (1.8)}$$

Această egalitate se obţine din formula binomială (1.7) pentru $x = y = 1$.

$$\boxed{C(n,r) = C(n-1,r) + C(n-1,r-1) \text{ dacă } n > r > 0. \qquad (1.9)}$$

Demonstraţie combinatorială. Fie $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ şi C o r-combinare a lui S. $C(n,r)$ este numărul de r-combinări ale lui S, adică numărul de posibilităţi de a alege o r-combinare a lui S. Pe de altă parte, C poate fi aleasă în unul din următoarele două feluri:

1. cu $n \in C$. În acest caz $C = C' \cup \{n\}$ unde C' este o $(r-1)$-combinare a lui $\{1, 2, \ldots, n-1\}$, Numărul de posibilităţi de a alege C coincide cu numărul de posibilăţi de a alege $(r-1)$-combinarea C' a lui $\{1, 2, \ldots, n-1\}$, adică $C(n-1, r-1)$.

   Rezultă că sunt $C(n-1, r-1)$ r-combinări C cu $n \in C$.

2. cu $n \notin C$. În acest caz C este o r-combinare a lui $\{1, 2, \ldots, n-1\}$, deci există $C(n-1, r)$ de astfel de r-combinări C.

Conform regulii sumei, r-combinarea C poate fi aleasă în $C(n-1, r-1) + C(n-1, r)$ feluri. Deci $C(n,r) = C(n-1, r-1) + C(n-1, r)$. □

Triunghiul lui Pascal

Cu formula (1.9) şi formulele $C(n, 0) = C(n, n) = 0$ pentru toţi $n \in \mathbb{N}$ putem calcula recursiv toate valorile lui $C(n,r)$, completând cu numere un tabel triunghiular, numit **triunghiul lui Pascal**, ale cărui rânduri sunt numerotate crescător începând cu $n = 0$. Completarea se face astfel:

- Rândul 0 se completează cu numărul 1, care este $C(0, 0)$.
- Presupunând că rândul n a fost completat cu numerele $P[n, 0], P[n, 1]$, $\ldots$, $P[n, n]$, vom completa rândul $n+1$ cu $n+1$ numere: $P[n+1, 0] = 1$, $P[n+1, n+1] = 1$ şi $P[n+1, r] = P[n, r-1] + P[n, r]$ pentru $1 \leq r \leq n$.

De exemplu, primele 6 rânduri ale triunghiului lui Pascal sunt

$$\begin{array}{ccccccccccccl}
 & & & & & 1 & & & & & & & \leftarrow \text{rândul } n=0 \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & & & \leftarrow \text{rândul } n=1 \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \leftarrow \text{rândul } n=2 \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \leftarrow \text{rândul } n=3 \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \leftarrow \text{rândul } n=4 \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \leftarrow \text{rândul } n=5
\end{array}$$

Triunghiul lui Pascal are următoarele proprietăţi:

- Conţine 1 la capetele fiecărui rând.
- Toate celelalte numere se obţin ca sumă a numerelor de deasupra lor.
- Fiecare rând n conţine secvenţa de numere binomiale $C(n, 0)$, $C(n, 1)$, $C(n, 2)$, ..., $C(n, n)$. Altfel spus, intrările din tabel satisfac condiţia $P[n, r] = C(n, r)$ pentru toţi $n \in \mathbb{N}$ şi $0 \leq r \leq n$.

Triunghiul lui Pascal ne oferă a metodă alternativă de calcul al lui $C(n, r)$:

- Cu metoda directă calculăm $\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ cu $O(n)$ înmulţiri şi o împărţire.
- Cu triunghiul lui Pascal calculăm valoarea lui $C(n, r)$ în $P[n, r]$ făcând $O(r \cdot n)$ adunări pentru a calcula valorile $P[i, j]$ pentru $i \in \{0, \ldots, n\}$ şi $j \in \{1, \ldots, r\}$.

1.1.4 Coeficienţi multinomiali

Numerele $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r}$ definite la pagina 9 se numesc **coeficienţi multinomiali** fiindcă apar în calculul expansiunii polinomului $(x_1 + x_2 + \ldots + x_r)^n$:

$$(x_1+x_2+\ldots+x_r)^n = \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_r=n} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_r^{n_r}. \quad (1.10)$$

De exemplu

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2 + x_3)^2 = & \sum_{n_1+n_2+n_3=2} x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} \\ = & \binom{2}{2,0,0} x_1^2 + \binom{2}{0,2,0} x_2^2 + \binom{2}{0,0,2} x_3^2 + \\ & + \binom{2}{1,1,0} x_1 x_2 + \binom{2}{1,0,1} x_1 x_3 + \binom{2}{0,1,1} x_2 x_3 \\ = & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\, x_1 x_2 + 2\, x_1 x_3 + 2\, x_2 x_3.\end{aligned}$$

O demonstraţie combinatorială a formulei (1.10) este următoarea:

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2 + \ldots + x_r)^n = & \underbrace{(x_1 + x_2 + \ldots + x_r) \cdot \ldots \cdot (x_1 + x_2 + \ldots + x_r)}_{n \text{ ori}} \\ = & \sum_{\langle u_1, u_2, \ldots, u_n \rangle \in \{x_1, \ldots, x_r\}^n} u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_n\end{aligned}$$

iar fiecare termen $u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_n$ este de forma $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r}$ cu $n_1, n_2, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$ şi $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$. Deasemenea, $u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_n = x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r}$ dacă şi numai dacă $\langle u_1, u_2, \ldots, u_n \rangle$ conţine n_1 apariţii ale lui x_1, n_2 apariţii ale lui x_2, ..., şi n_r apariţii ale lui x_r. Rezultă că coeficientul lui $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r}$ în expansiunea produsului $(x_1 + x_2 + \ldots + x_r)^n$ este $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r}$, deci egalitatea (1.10) are loc. □

Exemplul 22. Să se demonstreze că dacă $n \geq 1$ atunci $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

DEMONSTRAŢIE: Pentru $x = 1, y = -1$ în formula binomială (1.7) obţinem

$$(1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k}$$

de unde rezultă că $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$. □

Exemplul 23. Ce coeficient are $x^2 y^2 z$ în expansiunea lui $(3\,x + y + 2z)^5$?

RĂSPUNS: Ştim că

$$\begin{aligned}(3\,x + y + 2z)^5 &= \sum_{r_1+r_2+r_3=5} \binom{5}{r_1, r_2, r_3} (3\,x)^{r_1} y^{r_2} (2\,z)^{r_3} \\ &= \sum_{r_1+r_2+r_3=5} \binom{5}{r_1, r_2, r_3} \cdot 3^{r_1} \cdot 2^{r_3} \cdot x^{r_1} y^{r_2} z^{r_3}.\end{aligned}$$

Rezultă că $x^2 y^2 z$ are coeficientul $\binom{5}{2,2,1} \cdot 3^2 \cdot 2^1 = 30 \cdot 9 \cdot 2 = 540$. □

1.1.5 Concluzii

- Principiile de bază ale teoriei numărării sunt Regula Produsului şi Regula Sumei. Cu aceste reguli se pot da soluţii combinatoriale simple la numeroase probleme de numărare. Exemple de astfel de probleme sunt:
  - Numărul de şiruri diferite de n biţi este 2^n.
  - Dacă A şi B sunt mulţimi finite, $|A| = m$, $|B| = n$ şi $n \geq m$ atunci (1) numărul de funcţii de la $f : A \to B$ este n^m, şi (2) numărul de funcţii injective $f : A \to B$ este $P(n, m) = n!/(n-m)!$.
  - Numărul de submulţimi ale unei mulţimi finite S este $2^{|S|}$.
- Cele mai importante aranjamente combinatoriale a elementelor unei mulţimi finite S sunt: aranjamentele ordonate (numite permutări),

şi aranjamentele neordonate (numite combinări). Aceste aranjamente pot fi cu sau fără repetiţie. Tabelul de mai jos conţine formulele de calcul al numărului de aranjamente combinatoriale de diferite tipuri ale elementelor unei mulţimi $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ cu n elemente:

r-permutări	$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$
r-permutări cu repetiţie	n^r
r-permutări cu repetiţie în care a_1 apare de r_1 ori a_2 apare de r_2 ori $\ldots$ a_n apare de r_n ori (se observă că $r_1 + r_2 + \ldots + r_n = r$)	$\binom{r}{r_1, r_2, \ldots, r_n} = \frac{r!}{r_1! r_2! \cdot \ldots \cdot r_n!}$
r-combinări	$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$
combinări	2^n
r-combinări cu repetiţie	$\binom{r+n-1}{n-1} = \frac{(r+n-1)!}{r!(n-1)!}$

- Numerele $\binom{r}{r_1, r_2, \ldots, r_n}$ cu $r, r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{N}$ şi $r_1 + r_2 + \ldots + r_n = r$ se numesc numere multinomiale pentru că apar ca şi coeficienţi ai termenilor din expansiunea polinomului $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^r$:

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^r = \sum_{r+1+r_2+\ldots+r_n=r} \binom{r}{r_1, r_2, \ldots, r_n} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_n^{r_n}.$$

- În particular, numerele $\binom{n}{r}$ coincid cu numerele multinomiale $\binom{n}{r, n-r}$. Ele se numesc numere binomiale pentru că apar ca şi coeficienţi ai termenilor din expansiunea binomului $(x_1 + x_2)^n$:

$$(x_1 + x_2)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x_1^r x_2^{n-r}.$$

1.1.6 Exerciţii

1. Câte şiruri de 7 litere majuscule din alfabetul englez există pentru fiecare din următoarele situaţii:

   (a) fiecare literă poate să apară de mai multe ori?

   (b) nici o literă nu apare de mai multe ori?

   (c) şirul începe cu `X` iar literele nu se pot repeta?

(d) şirul nu începe cu `X` iar literele se pot repeta?

Se ştie că alfabetul englez are 26 litere majuscule.

2. Fie A o mulţime cu m elemente şi B o mulţime cu n elemente. O funcţie parţială de la A la B este o funcţie de la o submulţime (posibil vidă) $dom(f)$ a lui A la B. (Spunem că f este *nedefinită* pentru elementele din $A \setminus dom(f)$.) Câte funcţii parţiale există de la A la B?

3. Un *palindrom* este un şir care rămâne neschimbat dacă este citit invers, adică de la dreapta la stânga. Câte şiruri de biţi de lungime n sunt palindroame?

4. Un comitet este alcătuit din membri astfel încât fiecare din cele 41 judeţe ale României contribuie fie cu un senator sau cu un deputat. Se presupune că există 2 senatori şi 3 deputaţi din fiecare judeţ. Câte astfel de comitete se pot alcătui?

5. Câte şiruri de cinci caractere ASCII conţin caracterul @ cel puţin o dată? (Observaţie: Există 128 caractere ASCII.)

6. Câte şiruri de două sau trei litere din mulţimea $\{A, B, C, X, Y, Z\}$ urmate de două sau trei cifre zecimale pot fi formate?

7. Să se determine n astfel încât

   a) $P(n, 2) = 110$. b) $P(n, 4) = 12\, P(n, 2)$.

8. Să se calculeze n dacă se ştie că

   a) $\binom{n}{2} = 45$. b) $\binom{n}{3} = P(n, 2)$. c) $\binom{n}{5} = \binom{n}{2}$.

9. Câte permutări ale literelor A,B,C,D,E,F,G,H conţin

   (a) şirul ED?
   (b) şirul CDE?
   (c) şirurile BA şi FGH?
   (d) şirurile AB, DE şi GH?
   (e) şirurile CAB şi BED?
   (f) şirurile BCA şi ABF?

10. Se consideră o serie de 10 aruncări cu banul care produce secvenţa de rezultate $R_1 R_2 \cdots R_{10}$ unde $R_i \in \{C, P\}$ este rezultatul aruncării i (C pentru *cap* sau P pentru *pajură*).

(a) Câte rezultate posibile sunt în total?

(b) Câte rezultate posibile conţin exact 2 capete?

(c) Câte rezultate posibile conţin exact 3 pajuri?

(d) Câte rezultate posibile conţin acelaşi număr de capete şi pajuri?

11. Câte şiruri diferite se pot forma rearanjând literele şirului MISSISSIPPI?

12. Câte soluţii are ecuaţia $x_1 + x_2 + x_3 = 8$ dacă $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}$?

13. O sută de bilete de tombolă numerotate de la 1 la 100 s-au vândut la 100 persoane diferite, urmând ca 3 bilete să câştige 500 lei şi un bilet să câştige 1000 lei. Câte posibilităţi de acordare a premiilor sunt dacă

    (a) nu sunt restricţii?

    (b) biletul 47 este necâştigător?

    (c) biletele 19 şi 47 sunt câştigătoare?

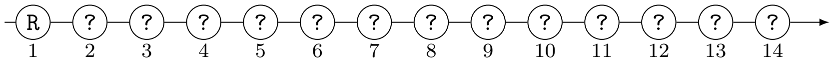
    (d) biletele 19, 47 şi 73 sunt câştigătoare?

    (e) biletele 19, 47, 73 şi 97 sunt câştigătoare?

14. Câte permutări are mulţimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ au primul element mai mic decât al doilea element?

15. Câte şiruri de 10 biţi conţin cel puţin trei de 1 şi cel puţin trei de 0?

16. Denis are 6 mărgele roşii şi 8 mărgele verzi. În câte feluri poate înşira Denis cele 14 mărgele pe o aţă dacă prima mărgea trebuie să fie roşie, şi are voie să pună cel mult o mărgea verde între două mărgele roşii?



17. Câte serii de înregistrare formate din trei litere urmate de trei cifre nu conţin nici o literă de două ori şi nici o cifră de două ori? Se presupune că avem la dispoziţie 26 litere şi 10 cifre.

18. Alfabetul latin are 26 litere, dintre care 5 sunt vocale: `A`, `E`, `I`, `O` şi `U`.

    (a) Câte şiruri de 11 litere din acest alfabet conţin exact 3 vocale?

    (b) Câte dintre şirurile de 11 litere cu exact 3 vocale au cel puţin o literă care se repetă?

19. Asociaţia Internaţională de Fotbal prevede că o echipă trebuie să fie formată din 11 jucători, dintre care unul este portar. Fiecare din ceilalţi 10 poate fi fundaş, mijlocaş sau atacant. Nu există nici o restricţie asupra numărului de fundaşi, mijlocaşi sau atacanţi.

    (a) În câte feluri se poate configura o echipă de fotbal? De exemplu, o configuraţie poate avea 1 portar, 3 fundaşi, 3 mijlocaşi şi 4 atacanţi, iar altă configuraţie poate avea 1 portar, 6 fundaşi, nici un mijlocaş şi 4 atacanţi.

    (b) Câte configuraţii au cel puţin 2 fundaşi, cel puţin 2 mijlocaşi şi cel puţin 2 atacanţi?

20. Câte submulţimi cu cel puţin 3 elemente are o mulţime cu 10 elemente?

21. În câte feluri putem alege cinci fructe de pe o tarabă cu mere, pere şi prune? Ordinea alegerii fructelor nu contează.

22. Ce coeficient are x^3y^4 în expansiunea binomului $(2\,x+3\,y)^7$?

23. Ce coeficient are x^2y^3z în expansiunea lui $(2\,x-y-3\,z)^6$?

24. Demonstraţi că dacă $m, n \in \mathbb{N}$ atunci

$$\sum_{k_1+k_2+\ldots+k_m=n} \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} = m^n.$$

25. Demonstraţi că dacă $n-i+1 \geq r-1 \geq 0$ atunci

$$\sum_{j=1}^{i-1} \binom{n-j}{r-1} = \binom{n}{r} - \binom{n-i+1}{r}.$$