Capitole Speciale de Informatică

Programare Liniară

Programarea liniară (numită şi **optimizare liniară**) este o metodă de calcul al celui mai bun rezultat (de exemplu, profitul maxim sau costul minim) într-un model matematic ale cărui constrângeri sunt reprezentate cu relaţii liniare. Un caz special al programării liniare este **programarea matematică** (numită şi **optimizare matematică**).

1 Probleme standard de programare liniară

În general, o problemă de programare liniară este fie o problemă de maximizare sau o problemă de minimizare.

1.1 Problema standard de maximizare liniară

Să se maximizeze $c_1\,x_1 + \ldots + c_n x_n$
adică să se determine $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ pentru care $c_1\,x_1 + \ldots + c_n\,x_n$ ia valoarea maximă

în raport cu constrângerile

$$\begin{aligned} a_{11}\,x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}\,x_1 + \ldots + a_{mn}x_n &\leq b_m \end{aligned}$$

şi $x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$

unde $a_{ij}, b_i, c_j \in \mathbb{R}$ pentru orice $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

1.2 Problema standard de minimizare liniară

Să se minimizeze $y_1\,b_1 + \ldots + y_m\ b_m$
adică să se determine $y_1, \ldots, y_m \in \mathbb{R}$ pentru care $y_1\,b_1 + \ldots + y_m\,b_m$ ia valoarea minimă

în raport cu constrângerile

$$y_1\, a_{11} + \ldots + y_m\, a_{m1} \geq c_1$$
$$\vdots$$
$$y_1\, a_{1n} + \ldots + y_m\, a_{mn} \geq c_m$$

şi $y_1 \geq 0, \ldots, y_m \geq 0$

unde $a_{ij}, b_i, c_j \in \mathbb{R}$ pentru orice $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Se observă că această problemă de minimizare liniară este echivalentă cu următoarea problemă de maximizare liniară:

Să se maximizeze $(-b_1)\, y_1 + \ldots + (-b_m)\, y_m$
adică să se determine $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ pentru care $y_1\,(-b_1) + \ldots + y_m\,(-b_m)$ ia valoarea maximă

în raport cu constrângerile

$$(-a_{11})\, y_1 + \ldots + (-a_{m1})\, y_m \leq -c_1$$
$$\vdots$$
$$(-a_{1n})\, y_1 + \ldots + (-a_{mn})\, y_m \leq -c_m$$

şi $y_1 \geq 0, \ldots, y_m \geq 0$

unde $a_{ij}, b_i, c_j \in \mathbb{R}$ pentru orice $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Prin urmare, este suficient să ştim cum să rezolvăm problema de maximizare liniară.

1.3 Terminologie

- Funcţia $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto c_1\, x_1 + \ldots + c_n\, x_n \in \mathbb{R}$
  se numeşte **funcţie obiectiv**.

- **Regiunea fezabilă** a problemei de maximizare liniară este mulţimea punctelor $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ care satisface mulţimea de constrângeri liniare

$$a_{11}\, x_1 + \ldots + a_{1n} x_n \leq b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}\, x_1 + \ldots + a_{mn} x_n \leq b_m$$

- Vectorul $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ este **fezabil** dacă este un punct din regiunea fezabilă.

- Problema de programare liniară este **fezabilă** dacă regiunea fezabilă este nevidă.

- O problemă fezabilă de maxim (respectiv minim) este **nemărginită** dacă funcţia obiectiv poate lua valori oricât de mari (respectiv oricât de mici) pentru vectorii fezabili.
- **Valoarea** unei probleme fezabile de maxim (resp. minim) este valoarea maximă (resp. minimă) a funcţiei obiectiv pentru valori de intrare din mulţimea de constrângeri.
- Un vector fezabil pentru care funcţia obiectiv atinge valoarea problemei se numeşte **optim**.

Notaţie prescurtată (matricială) pentru problema de maximizare liniară:

Dacă $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, iar relaţia $\mathbf{u} \leq \mathbf{v}$ între vectorii $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$ şi $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$ indică faptul că $u_i \leq v_i$ pentru toţi $1 \leq i \leq m$

atunci problema de programare liniară are descrierea compactă:

Să se maximizeze $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$

în raport cu constrângerile $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ şi $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.

unde notaţia $(\cdot)^T$ reprezintă transpusa matricială.

2 Interpretare geometrică

Din punct de vedere geometric, regiunea fezabilă determinată de constrângerile liniare

$$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \text{ şi } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

este un **politop convex**, adică o regiune convexă în spaţiul n-dimensional $\mathbb{R}^n$, delimitată de cel mult m hiperplanuri.

Regiunea care dă o valoare constantă c funcţiei obiectiv

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mapsto \mathbf{c}^T\mathbf{x} \in \mathbb{R}$$

este hiperplanul definit de ecuaţia $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = c$.

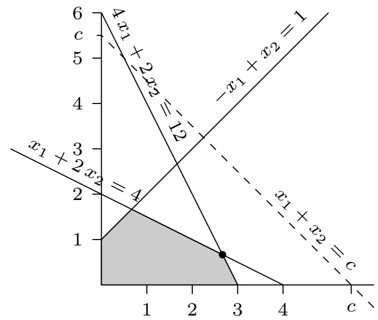

Figure 1: Zona fezabilă pentru problema de programare liniară ilustrată

Exemplu ilustrat şi rezolvat

Să se determine numerele x_1 şi x_2 care maximizează suma x_1+x_2 şi care satisfac constrângerile

$$\begin{aligned} x_1 + 2\,x_2 &\leq 4 \\ 4\,x_1 + 2\,x_2 &\leq 12 \\ -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

În acest exemplu, zona fezabilă a problemei de programare liniară este interiorul unui poligon convex delimitat de cinci semiplane în spaţiul cartezian $\mathbb{R}^2$, marcat cu gri in figura 1.

Funcţia obiectiv are valoarea constantă c pentru punctele de pe dreapta

$$x_1 + x_2 = c$$

care este ilustrată cu linie întreruptă în figura 1. Problema este de a găsi punctul din zona fezabilă care se află pe dreapta $x_1 + x_2 = c$ cu valoare maxim posibilă pentru c.

Se observă uşor că punctul căutat se află la intersecţia dreptelor

$$\begin{aligned} 4\,x_1 + 2\,x_2 &= 12 \\ x_1 + 2\,x_2 &= 4 \end{aligned}$$

adică $(x_1, x_2) = \left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}\right)$, iar valoarea maximă a funcţiei obiectiv este $8/3+2/3 = 10/3$.

3 Exemple concrete

3.1 Exemplul 1: Problema dietei

Se presupun disponibile m feluri de mâncare $M_1, \ldots, M_m$ care conţin nutrienţi $N_1, \ldots, N_n$ esenţiali pentru sănătate. Fie c_j doza zilnică minim necesară de nutrient N_j şi b_i preţul pe unitate de mâncare M_i. Fie a_{ij} cantitatea de nutrient N_j conţinută în o unitate de mâncare M_i. Problema este de a asigura cantitatea necesară de nutrienţi cu un cost minim. Fie y_i numărul de unităţi de mâncare M_i ce trebuiesc cumpărate zilnic. Costul pe zi al unei astfel de diete este

$$b_1\, y_1 + b_2\, y_2 + \ldots + b_m\, y_m \tag{1}$$

Cantitatea de nutrient conţinută în această dietă este

$$y_1\, a_{1j} + y_2\, a_{2j} + \ldots + y_m\, a_{mj}$$

pentru $j = 1, \ldots, n$. Această dietă este luată în considerare doar dacă satisface condiţiile de minim necesar de nutrienţi, adică doar dacă

$$y_1\, a_{1j} + y_2\, a_{2j} + \ldots + y_m\, a_{mj} \geq c_j \quad \text{pentru } j = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Deoarece nu putem cumpăra o cantitate negativă de mâncare, avem implicit şi constrângerile

$$y_1 \geq y,\ y_2 \geq 0,\ \ldots,\ y_m \geq 0. \tag{3}$$

Problema devine: Să se minimizeze (1) încât să satisfacă constrângerile liniare (2) şi (3). Aceasta este evident o problemă de minim standard.

3.2 Exemplul 2: Problema transportului

Considerăm I porturi sau unităţi de producţie $P_1, \ldots, P_I$ care furnizează un anumit produs, şi J pieţe de desfacere $M_1, \ldots, M_J$ la care se doreşte furnizarea acestui produs. Fiecare port P_i deţine o cantitate s_i de produs ($i = 1, 2, \ldots, I$) şi fiecare piaţă M_j trebuie să primească cantitatea r_j ($j = 1, \ldots, J$). Fie b_{ij} costul de transport al unei unităţi de produs de la portul P_i la piaţa M_j. Problema este de a satisface cererile pieţelor cu un cost minim de transport.

Fie y_{ij} cantitatea de produs trimis de la P_i la M_j. Costul total de transport este

$$\sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} y_{ij} b_{ij} \tag{4}$$

Cantitatea trimisă de la P_i este $\displaystyle\sum_{j=1}^{J} y_{ij}$, şi deoarece volumul disponibil la P_i este s_i, trebuie să impunem constrângerea

$$\sum_{j=1}^{J} y_{ij} \leq s_i \quad \text{pentru } i = 1, \ldots, I. \tag{5}$$

Cantitatea trimisă la piaţa M_j este $\sum_{i=1}^{I} y_{ij}$, şi deoarece cantitatea cerută de M_j este r_j, trebuie să impunem constrângerea

$$\sum_{i=1}^{I} y_{ij} \geq r_j \quad \text{pentru } j = 1, \ldots, J. \tag{6}$$

Deoarece se presupune că nu putem trimite o cantitate negativă de la P_i la M_j, impunem şi constrângerile

$$y_{ij} \geq 0 \quad \text{pentru } i = 1, \ldots, I \text{ şi } j = 1, \ldots, J. \tag{7}$$

Această problemă se poate reformula ca o problemă de minim standard. Numărul variabilelor y este $I \cdot J$. Însă care este valoarea lui n? n este numărul total de constrângeri principale, deci $n = I + J$, dar unele constrângeri sunt $\geq$ în timp ce altele sunt $\leq$. În problema de minim standard, toate constrângerile sunt cu $\geq$. Putem realiza ecest lucru înmulţind constrângerile (5) cu -1:

$$\sum_{j=1}^{J} (-1)\, y_{ij} \geq s_i \quad \text{pentru } i = 1 \ldots, I. \tag{8}$$

Problema obţinută ,,minimizeză (4) în raport cu constrângerile (8), (6) şi (7)" este acum în formă standard.

3.3 Exemplul 3: Problema analizei activităţii

Se consideră n activităţi $A_1, \ldots, A_n$ disponibile în o companie făcând uz de m resurse $R_1, \ldots, R_m$ (ore de lucru, oţel, etc.). Fie b_i cantitatea disponibilă de resursă R_i şi a_{ij} cantitatea de resursă R_i folosită în efectuarea activităţii A_j cu intensitate unitară. Fie c_j valoarea netă pentru companie a efectuării activităţii A_j cu intensitate unitară. Problema este de a alege intensităţile de efectuare a diverselor activităţi pantru a maximiza valoarea de producţie a companiei în raport cu resursele specificate.

Fie x_j intensitatea de efectuare a operaţiei A_j. Valoarea acestei alocări de activitate este

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j. \tag{9}$$

Cantitatea de resursă R_i folosită în această alocare de activitate nu poate fi mai mare decât b_i, deci

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad \text{pentru } i = 1, \ldots, m. \tag{10}$$

Se presupune că nu putem efectua o activitate cu intensitae negativă, deci

$$x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0, \;\; \ldots, \;\; x_n \geq 0. \tag{11}$$

Problema devine: Să se maximizeze (9) în raport cu constrângerile liniare (10), şi (11). Aceasta este o problemă de maxim standard.

3.4 Exemplul 4: Problema alocării optime

Se consideră I persoane disponibile pentru J lucrări. Valoarea persoanei i care lucrează o zi la lucrarea j este a_{ij} pentru $i = 1, \ldots, I$ şi $j = 1, \ldots, J$. Problema este de a găsi o **alocare** de lucrări la persoane cre să maximizeze valoarea totală.

O alocare este o alegere de numere x_{ij} pentru $i = 1, \ldots, I$ şi $j = 1, \ldots, J$, unde x_{ij} reprezintă proporţia din timpul persoanei i alocat pentru a efectua lucrarea j. Deci

$$\sum_{j=1}^{J} x_{ij} \leq 1 \quad \text{pentru } i = 1, \ldots, I \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{I} x_{ij} \leq 1 \quad \text{pentru } j = 1, \ldots, J \tag{13}$$

şi

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{pentru } i = 1, \ldots, I \text{ şi } j = 1, \ldots, J. \tag{14}$$

Relaţia (12) indică faptul că o persoană nu poate aloca mai mult de 100% din timpul său de lucru, (13) înseamnă că o singură persoană are voie să efectueze o singură lucrare la un moment dat, iar (14) afirmă că nimeni nu poate lucra o durată negativă de timp.

Problema este de a maximiza valoarea totală

$$\sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} a_{ij} x_{ij}$$

în raport cu constrângerile (12), (13) şi (14). Aceasta este o problemă de maxim standard.

4 Forma standard

O problemă de programare liniară a fost definită ca maximizarea sau minimizarea unei funcţii liniare (funcţia obiectiv) în raport cu nişte constrângeri liniare. Toae problemele de acest fel pot fi aduse la o formă de maxim standard decă se aplică tehnicile descrise mai jos.

Am văzut deja cum o problemă de minim poate fi redusă la o problemă de maxim standard înmulţind funcţia obiectiv cu -1. În mod asemănător constrângerile de forma $\sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} \geq c_j$ for $j = 1, \ldots, n$ pot fi rescrise sub forma

$$\sum_{i=1}^{m} a'_{ji} y_i \leq -c_j \quad \text{pentru } j = 1, \ldots, n$$

unde $a'_{ji} = -a_{ij}$ pentru toţi $i = 1, \ldots, m$ şi $j = 1, \ldots, n$.

Mai sunt două cazuri problematice:

1. *Unele constrângeri sunt egalităţi.* O constrângere de egalitate

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$$

poate fi eliminată rezolvând ecuaţia pentru un x_j pentru care $a_{ij} \neq 0$ şi apoi înlocuind x_j cu această soluţie în toate celelalte constrângeri şi în funcţia obiectiv.

2. *Unele variabile nu sunt constrânse să fie negative.* O variabilă nerestricţionată x_j poate fi înlocuită cu diferenţa dintre două variabile nenegative, $x_k = u_j - v_j$, unde $u_j \geq 0$ şi $v_j \geq 0$. Această înlocuire introduce în problemă o variabilă în plus şi două constrângeri de nenegativitate.

   Deci, orice teorie derivată pentru probleme în format standard este aplicabilă pentru probleme generale. Totuşi, din punctul de vedere al calculului, lărgirea numărului de variabile şi a numărului de constrângeri în cazul 2 este de nedorit. Vom vedea mai târziu cum se pot evita aceste neajunsuri.

5 Software disponibil pentru rezolvarea sistemelor de optimizare liniară

Mathematica (`http://www.wolfram.com/mathematica/`) este un sistem de calcul tehnic foarte performant. In particular, poate fi folosit pentru a rezolva probleme de optimizare.

Metodele disponibile sunt:

1. `Maximize[{f,cons},{x,y,...}]` maximizează funcţia obiectiv `f` în raport cu constrângerile `cons`

2. `Minimize[{f,cons},{x,y,...}]` minimizează funcţia obiectiv `f` în raport cu constrângerile `cons`