Rețele neuronale recurente

- Arhitectura
  - Rețele cu interconectivitate totală
  - Rețele cu unități contextuale
  - Rețele celulare

- Dinamica rețelelor recurente
  - Dinamica în timp continuu
  - Dinamica în timp discret
  - Proprietăți de stabilitate

- Aplicații

Rețele neuronale recurente

- Arhitectura
  - Se caracterizează prin prezența conexiunilor inverse (graful suport conține cicluri)
  - In funcție de densitatea conexiunilor inverse există:
    - Rețele total recurente (modelul Hopfield)
    - Rețele parțial recurente:
      - Cu unități contextuale (modelul Elman)
      - Celulare (modelul Chua-Yang)
- Aplicabilitate
  - Memorare asociativă
  - Rezolvarea problemelor de optimizare combinatorială
  - Predicție în serii temporale
  - Prelucrarea imaginilor
  - Modelarea sistemelor dinamice și a fenomenelor haotice

Rețele de tip Hopfield

Arhitectura: N unități total interconectate

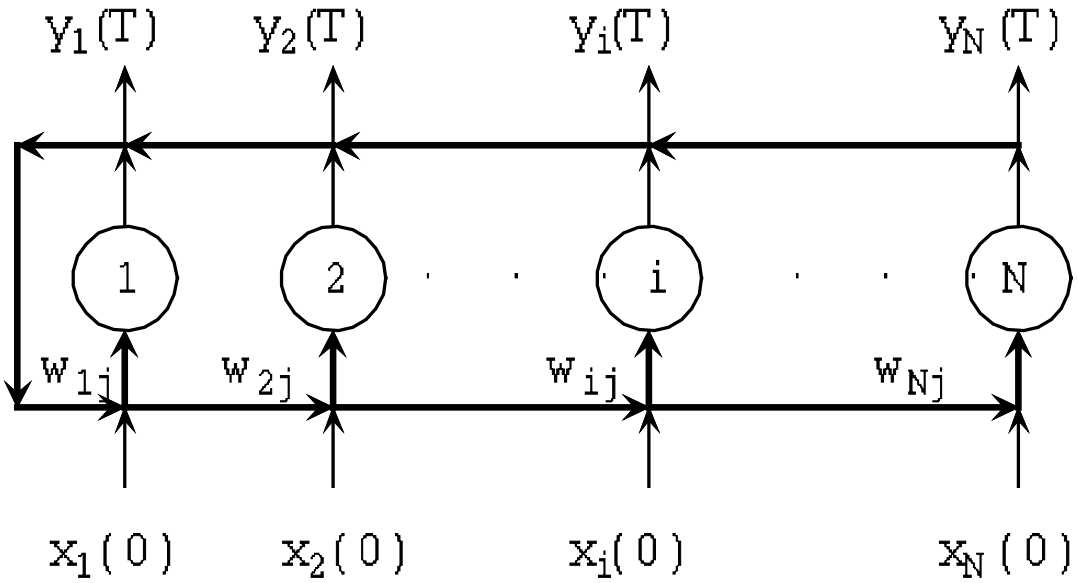
Funcții de transfer:

Signum/Heaviside

Logistica/Tanh

Parametrii:

matricea cu ponderi a conexiunilor



Notatii: $x_i(t)$ – potențialul (starea) neuronului i la momentul t

$y_i(t)=f(x_i(t))$ – semnalul de ieșire produs de neuronul i la momentul t

$I_i(t)$ – semnalul de intrare primit din partea mediului

w_{ij} – ponderea conexiunii dintre neuronul j și neuronul i

Rețele de tip Hopfield

Funcționare: - semnalul de ieșire este rezultatul unui proces dinamic

- rețelele de tip Hopfield pot fi asimilate unor sisteme dinamice a căror stare se modifică în timp

Starea rețelei:

- vectorul stărilor neuronilor $X(t)=(x_1(t), \ldots, x_N(t))$

sau

- vectorul semnalelor de ieșire $Y(t)=(y_1(t),\ldots,y_N(t)$

Descrierea dinamicii

- Timp discret – relații de recurență (ecuații cu diferențe)
- Timp continuu – ecuații diferențiale

Rețele de tip Hopfield

Funcționare în timp discret:

starea rețelei la momentul t+1 este descrisă în funcție de starea rețelei la momentul t

Starea rețelei: Y(t)

Variante:

- Asincronă: un singur neuron își poate modifica starea la un moment dat
- Sincronă: toți neuronii își schimbă starea simultan

Răspunsul rețelei: starea în care se stabilizează rețeaua

Retele de tip Hopfield

Varianta asincronă:

$$y_{i*}(t+1) = f\left(\sum_{j=1}^{N} w_{i*j} y_j(t) + I_{i*}(t)\right)$$

$$y_i(t+1) = y_i(t), \quad i \neq i*$$

Alegerea lui i*:

- prin parcurgerea sistematică a mulțimii {1,2,…,N}
- aleator (dar astfel încât la fiecare etapă să se modifice starea fiecărui neuron)

Simularea rețelei:

- alegerea unei stări inițiale (în funcție de problema de rezolvat)
- calculul stării următoare până când rețeaua se stabilizează

(distanța dintre două stări succesive este mai mică decât o valoare prestabilită, ε)

Retele de tip Hopfield

Varianta sincronă:

$$y_i(t+1) = f\left(\sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_j(t) + I_i(t)\right),\ i = \overline{1, N}$$

In simulări se utilizează fie funcții de transfer discontinue fie continue

Algoritm de funcționare:

Stabilire stare inițială

REPEAT

se calculează noua stare pornind de la starea curentă

UNTIL < diferența dintre starea curenta și cea anterioară este suficient de mică >

Rețele de tip Hopfield

Funcționare in timp continuu:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -x_i(t) + \sum_{j=1}^{N} w_{ij} f(x_j(t)) + I_i(t),\ i = \overline{1, N}$$

Simularea rețelei: rezolvarea numerică a sistemului de ecuații pornind de la o valoare inițială $x_i(0)$

Exemplu: metoda lui Euler explicită

$$\frac{x_i(t+h) - x_i(t)}{h} \cong -x_i(t) + \sum_{j=1}^{N} w_{ij} f(x_j(t)) + I_i(t),\ i = \overline{1, N}$$

$$x_i(t+h) \cong (1-h)x_i(t) + h\sum_{j=1}^{N} w_{ij} f(x_j(t)) + I_i(t),\ i = \overline{1, N}$$

Semnal de intrare constant :

$$x_i^{nou} \cong (1-h)x_i^{vechi} + h(\sum_{j=1}^{N} w_{ij} f(x_j^{vechi}) + I_i),\ i = \overline{1, N}$$

Proprietăți de stabilitate

Comportări posibile ale unei rețele:

- X(t) tinde către o stare staționară X* (punct fix al dinamicii rețelei)
- X(t) oscilează între două sau mai multe stări posibile
- X(t) are o comportare haotică sau ||X(t)|| crește pe măsură ce t crește

Comportări utile din punct de vedere practic:

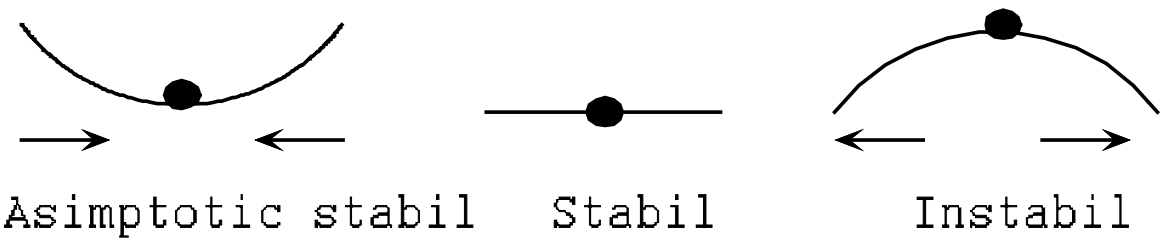
- Rețeaua tinde către o stare staționară
  - Există o mulțime de stări staționare: memorare asociativă
  - Stare staționară unică: rezolvarea pb. de optimizare

- Rețeaua are comportare periodică
  - Modelarea seriilor temporale

Obs. Cea mai convenabilă variantă este cea în care rețeaua tinde către o stare staționară stabilă (perturbații mici în condițiile inițiale nu afectează semnificativ soluția)

Proprietăți de stabilitate

Tipuri de echilibru (intuitiv)



Formalizare:

$$\frac{dX(t)}{dt} = F(X(t)), \quad X(0) = X_0$$

$$F(X^*) = 0$$

X* este soluție staționară asimptotic stabilă (în raport cu condițiile inițiale) dacă:

stabilă

atractivă

Proprietăți de stabilitate

Stabilitate:

X* este stabilă dacă pentru orice ε>0 există δ(ε) > 0 cu proprietățile: $||X_0-X^*||< \delta(\varepsilon)$ implică $||X(t;X_0)-X^*||< \varepsilon$

Atractivitate:

X* este atractivă dacă există δ > 0 cu proprietatea: $||X_0-X^*||< \delta$ implică $X(t;X_0)->X^*$

Pentru a studia proprietatea de (asimptotic) stabilitate a soluțiilor în teoria sistemelor dinamice se poate folosi metoda funcției Liapunov

Proprietati de stabilitate

Funcție Liapunov:

$$V : R^N \to R, \text{ marginita inferior}$$

$$\frac{dV(X(t))}{dt} < 0, \text{ pentru orice t} > 0$$

- Funcție mărginită inferior care descrește de-a lungul soluțiilor => soluția trebuie să se stabilizeze
- Dacă unui sistem i se poate asocia o funcție Liapunov atunci soluțiile staționare ale acestuia sunt asimptotic stabile
- Funcțiile Liapunov sunt similare funcțiilor de energie din fizică (sistemele fizice tind în mod natural catre stări de energie minimă)
- Stările pentru care funcția Liapunov este minimă corespund stărilor de energie minimă, care sunt stări stabile
- Daca rețeaua neuronală satisface anumite proprietăți atunci există functie Liapunov asociată

Proprietăți de stabilitate

Rezultate de stabilitate pentru rețelele neuronale (cazul continuu):

Dacă:

- matricea ponderilor este simetrică ($w_{ij}=w_{ji}$)
- funcția de transfer este strict crescătoare ($f'(u)>0$)
- semnalul de intrare este constant ($I(t)=I$)

Atunci toate soluțiile staționare asociate rețelei sunt asimptotic stabile

Funcția Liapunov asociată:

$$V(x_1,\ldots,x_N)=-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} w_{ij} f(x_i) f(x_j)-\sum_{i=1}^{N} f(x_i) I_i+\sum_{i=1}^{N}\int_0^{f(x_i)} f^{-1}(z)dz$$

Proprietăți de stabilitate

Rezultate de stabilitate pentru rețelele neuronale (cazul discret - asincron):

Dacă:

- matricea ponderilor este simetrică ($w_{ij}=w_{ji}$)
- funcția de transfer este signum sau Heaviside
- semnalul de intrare este constant (I(t)=I)

Atunci toate soluțiile staționare asociate rețelei sunt asimptotic stabile

Functia Liapunov asociată

$$V(y_1,\ldots,y_N)=-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} w_{ij}y_i y_j-\sum_{i=1}^{N} y_i I_i$$

Proprietăți de stabilitate

Rezultatul anterior sugerează că stările staționare (punctele fixe) ale dinamicii sistemului sunt stabile

Fiecarei stări staționare îi corespunde o regiune de atracție (dacă starea inițială a rețelei se află în regiunea de atracție a unei stări staționare atunci sistemul va tinde către starea staționară corespunzătoare

Această proprietate este utilă în cazul memoriilor asociative

In cazul dinamicii sincrone rezultatul nu mai este valabil, putându-se arăta în schimb că soluțiile periodice de periodă 2 (rețeaua oscilează între două stări) sunt stabile

Memorii asociative

Memorie = sistem de stocare și regăsire a informației

Memorie bazată pe adresă:

- Stocare localizată: toate “elementele” (biții) unei unități de informație (ex: o valoare numerică) sunt stocate în aceeași zonă de memorie identificabilă prin adresă
- Regăsire pe baza adresei

Memorie asociativă:

- Informația este stocată distribuit (nu mai exista conceptul de adresă)
- Regăsirea se realizează pe baza conținutului (se pornește de la un indiciu privind informația de regăsit – ex: imagine parțială sau alterată de zgomot)

Memorii asociative

Proprietăți:

- Robustețe (distrugerea unei componente nu impiedică regăsirea informației)

Modalități de implementare:

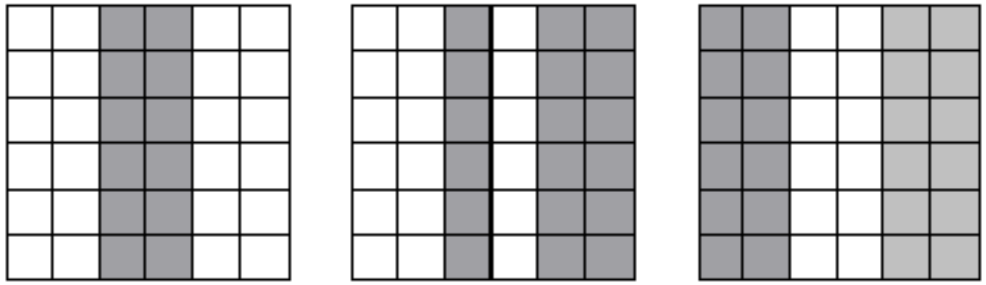
- Hardware:
  - Circuite electrice
  - Sisteme optice

- Software:
  - Rețea de tip Hopfield

Memorii asociative

Simularea software a memoriilor asociative:

- Informațiile sunt codificate binar: vectori cu elemente din {-1,1}
- Fiecarei componente a vectorului ii va corespunde o unitate funcțională în cadrul rețelei



Exemplu (a)

(-1,-1,1,1,-1,-1, -1,-1,1,1,-1,-1, -1,-1,1,1,-1,-1, -1,-1,1,1,-1,-1, -1,-1,1,1,-1,-1, -1,-1,1,1,-1,-1)

Memorii asociative

Proiectarea rețelelor pentru simularea software a memoriilor asociative:

- Rețea total interconectata cu N unități de tip signum (N este dimensiunea șabloanelor ce urmează a fi memorate)

Stocarea informației:

- Stabilirea ponderilor (elementele matricii W) astfel încât șabloanele de memorat să devină puncte fixe (stări staționare) ale dinamicii rețelei

Regăsirea informației:

- Inițializarea stării rețelei cu indiciul de start și simularea dinamicii rețelei până la identificarea stării staționare corespunzătoare; starea staționară va reprezenta informația regăsită

Memorii asociative

Set de vectori de memorat: $\{X^1,\ldots,X^L\}$, X^l din $\{-1,1\}^N$

Metode de stocare:

- Regula Hebb
- Metoda pseudo-inversei (algoritmul Diedierich – Opper)

Regula Hebb:

- Se bazează pe principiul enuntat de D. Hebb: “permeabilitatea sinaptică a doi neuroni activați simultan crește”

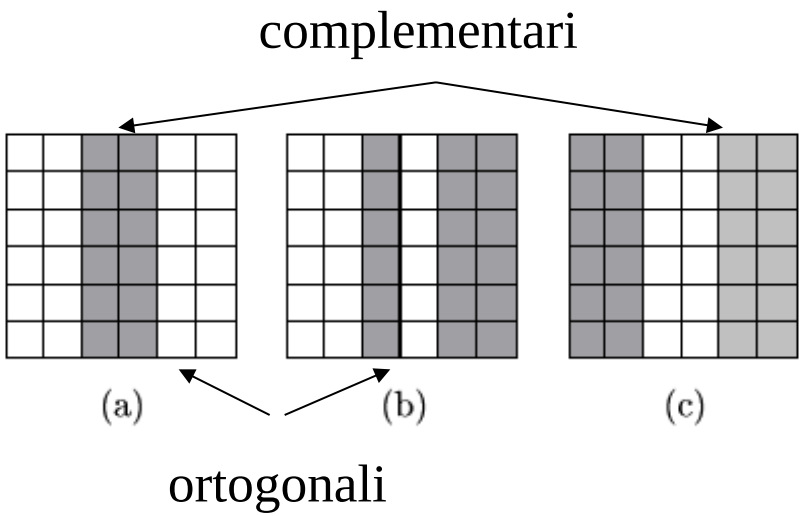
$$w_{ij} = \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{L} x_i^l x_j^l$$

Memorii asociative

$$w_{ij} = \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{L} x_i^l x_j^l$$

Proprietăți ale regulii Hebb:

- Dacă vectorii din setul de memorat sunt ortogonali doi câte doi (din punct de vedere statistic ar însemna că sunt necorelați) atunci toți sunt puncte fixe ale dinamicii rețelei
- O dată cu stocarea vectorului X se stochează și opusul său: -X
- O variantă care elimină condiția de ortogonalitate este cea bazată pe metoda pseudo-inversei



Memorii asociative

Metoda pseudo-inversei:

$$w_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{l,k} x_i^l (Q^{-1})_{lk} x_j^l$$

$$Q_{lk} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i^l x_i^k$$

- Se poate arăta că dacă matricea Q este inversabilă atunci toate elementele lui $\{X^1,\ldots,X^L\}$ sunt puncte fixe ale dinamicii retelei
- Pentru a evita calculul inversei matricii Q se poate folosi un algoritm iterativ de ajustare a ponderilor

Memorii asociative

Algoritmul Diederich-Opper:

$t := 0$

Se iniţializează matricea $W(0)$ folosind regula Hebb

REPEAT

  FOR $l := 1, L$ DO

    $y_i^l := \sum_{j=1}^{N} w_{ij}(t) x_j^l,\ i = \overline{1, N}$

    $w_{ij}(t+1) := w_{ij}(t) + \frac{1}{N}(x_i^l - y_i^l) x_j^l,\ i = \overline{1, N},\ j = \overline{1, N}$

  $t := t + 1$

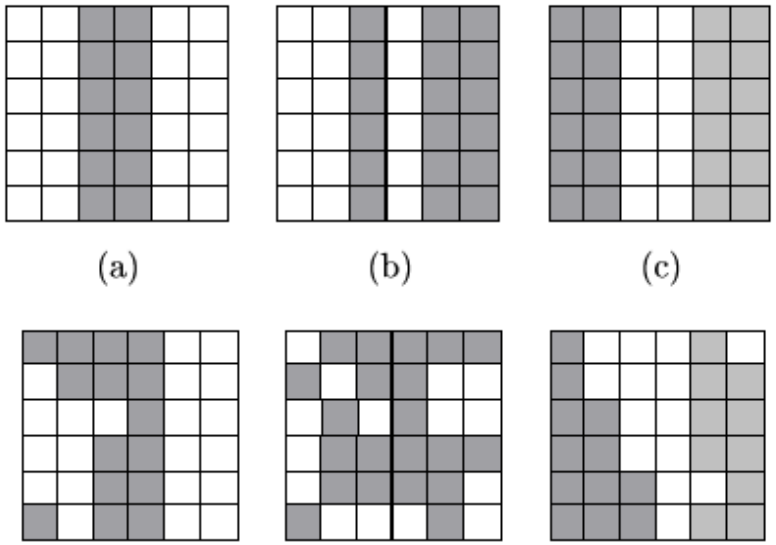
UNTIL $\|W(t) - W(t-1)\| < \epsilon$

Memorii asociative

Regăsirea informației:

- Inițializarea stării rețelei cu indiciul de la care se pornește
- Simularea funcționarii rețelei până la atingerea stării staționare

Vectori stocați



Vectori alterați de zgomot (25%, 50%, 75%)

Memorii asociative

Capacitatea de stocare:

- numărul de vectori care pot fi stocați și regăsiți (în limita unei anumite erori)
- Regăsire exactă: capacitate = N/(4lnN)
- Regăsire aproximativă (prob(eroare)=0.005): capacitate = 0.15*N

Atractori paraziți:

- Stări staționare ale rețelei care nu au fost explicit stocate ci au rezultat ca urmare a stocării altor vectori

Evitare atractori paraziți

- Modificarea metodei de stocare
- Introducerea de perturbații aleatoare in dinamica retelei

Formularea neuronală a unei probleme de optimizare combinatorială

- Prima abordare: Hopfield & Tank (1985)
  - Propun utilizarea unei rețele total interconectate pentru rezolvarea problemei comis-voiajorului
  - Ideea constă în a proiecta o rețea a cărei funcție de energie să fie similară funcției obiectiv a problemei de rezolvat (lungimea unui circuit hamiltonian) și in a o lăsa să "evolueze" în mod natural către starea de energie minima; aceasta ar reprezenta soluția problemei

Formularea neuronală a unei probleme de optimizare combinatorială

Problema de optimizare:

determină $(y_1,\ldots,y_N)$ cu proprietățile:

minimizează o funcție cost $C:R^N->R$

satisface restricții de forma $R_k\ (y_1,\ldots,y_N) =0$ cu R_k funcții nenegative

Etape:

- Transformarea problemei într-una de optimizare fără restricții (metoda penalizării)
- Reorganizarea funcției cost ca o funcție Liapunov
- Identificarea valorilor parametrilor și a semnalelor de intrare pornind de la forma funcției Liapunov
- Simularea rețelei

Formularea neuronală a unei probleme de optimizare combinatorială

Transformarea problemei într-una de optimizare fără restricții (metoda penalizării)

$$C^*(y_1,\ldots,y_N) = aC(y_1,\ldots,y_N) + \sum_{k=1}^{r} b_k R_k(y_1,\ldots,y_N)$$

$$a, b_k > 0$$

Valorile coeficienților a și b_k se aleg astfel încât să reflecte importanța relativă a funcției obiectiv și a restricțiilor

Formularea neuronală a unei probleme de optimizare combinatorială

Reorganizarea funcției cost ca o funcție Liapunov

$$C(y_1,....,y_N) = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} w_{ij}^{obj} y_i y_j - \sum_{i=1}^{N} I_i^{obj} y_i$$

$$R_k(y_1,....,y_N) = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} w_{ij}^{k} y_i y_j - \sum_{i=1}^{N} I_i^{k} y_i, \quad k = \overline{1,r}$$

Observatie: Ideea funcționeaza doar dacă funcția obiectiv și restricțiile sunt de grad cel mult 2

Formularea neuronală a unei probleme de optimizare combinatorială

Identificarea valorilor parametrilor si a semnalelor de intrare pornind de la forma funcției Liapunov

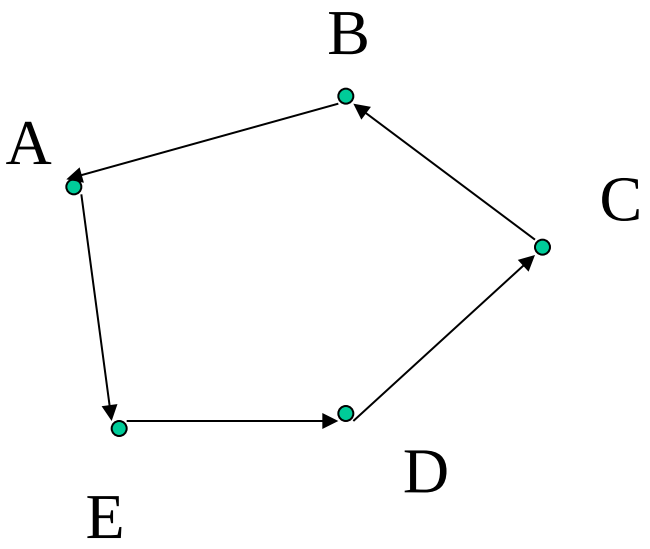
$$w_{ij} = a w_{ij}^{obj} + \sum_{k=1}^{r} b_k w_{ij}^{k}, \quad i, j = \overline{1, N}$$

$$I_i = a I_i^{obj} + \sum_{k=1}^{r} b_k I_i^{k}, \quad i = \overline{1, N}$$

Formularea neuronală a unei probleme de optimizare combinatorială

Exemplu: problema comis voiajorului

Se consideră un set de n orașe și se caută un traseu care trece o singură dată prin fiecare oraș și are costul minim



Formularea neuronală a unei probleme de optimizare combinatorială

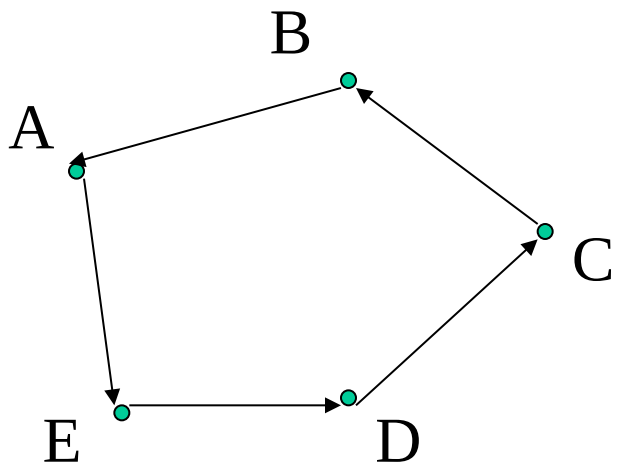
Proiectarea rețelei neuronale:

N=n*n neuroni

Starea neuronului (i,j):

1 - la etapa j este vizitat orașul i

0 - altfel



AEDCB

	1	2	3	4	5
A	1	0	0	0	0
B	0	0	0	0	1
C	0	0	0	1	0
D	0	0	1	0	0
E	0	1	0	0	0

Formularea neuronala a unei probleme de optimizare combinatoriala

Descrierea problemei:

Restricții:

- la un moment dat este vizitat un singur oraș (fiecare coloană conține un singur 1)
- fiecare oraș este vizitat o singură dată (fiecare linie conține un singur 1)

	1	2	3	4	5
A	1	0	0	0	0
B	0	0	0	0	1
C	0	0	0	1	0
D	0	0	1	0	0
E	0	1	0	0	0

Criteriu de optim:

costul traseului este minim

Formularea neuronală a unei probleme de optimizare combinatorială

Descrierea problemei:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_{ij} - 1\right)^2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} y_{ij} - 1\right)^2 = 0$$

$$C(Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1,k\neq i}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ik} y_{ij} (y_{k,j-1} + y_{k,j+1})$$

	1	2	3	4	5
A	1	0	0	0	0
B	0	0	0	0	1
C	0	0	0	1	0
D	0	0	1	0	0
E	0	1	0	0	0

Rescriere ca problemă de optimizare fără restricții

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_{ij} - 1\right)^2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} y_{ij} - 1\right)^2 = 0$$

$$C(Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1,k\neq i}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ik} y_{ij} (y_{k,j-1} + y_{k,j+1})$$

$$C^*(Y) = \frac{a}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1,k\neq i}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ik} y_{ij} (y_{k,j-1} + y_{k,j+1}) +$$

$$\frac{b}{2}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_{ij} - 1\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} y_{ij} - 1\right)^2\right)$$

Identificarea cu fctia Liapunov

$$V(Y) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} w_{ij,kl}\, y_{ij}\, y_{kl} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_{ij} I_{ij}$$

$$C*(Y) = \frac{a}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1,k\neq i}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ik}\, y_{ij}\,(y_{k,j-1} + y_{k,j+1}) +$$

$$\frac{b}{2}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_{ij} - 1\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} y_{ij} - 1\right)^2\right)$$

Valorile parametrilor:

$$w_{ij,kl} = -ac_{ik}(\delta_{l,j-1} + \delta_{l,j+1}) - b(\delta_{ik} + \delta_{jl} + \delta_{ik}\delta_{jl})$$

$$w_{ij,ij} = 0$$

$$I_{ij} = 2b$$

Serii temporale

- Serie temporală = serie de date înregistrate la momente succesive de timp (corespunzătoare unor mărimi ce evoluează în timp)

- Exemple:
  - Evolutia cursului valutar
  - Evolutia pretului unei actiuni
  - Evolutia temperaturii
  - Semnale biologice (electrocardiograma –EKG)

- Scopul analizei unei serii temporale: efectuarea de predicții

Serii temporale

Predicția se bazează pe un model asociat seriei care exprimă dependența dintre valoarea viitoare și valoarea curentă, respectiv valori anterioare

$$x(t+1) = F(x(t), x(t-1), \ldots, x(t-p+1), \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s)$$

ordinul modelului

Parametrii ce modelează factorii externi

Serii temporale

Modelul asociat unei serii temporale poate fi:

- Liniar
- Neliniar

- Determinist
- Aleator

Exemplu: modelul auto-regresiv (AR(p))

$$x(t+1) = \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i x(t-i) + \epsilon$$

Model zgomot (variabila aleatoare din N(0,1))

Serii temporale

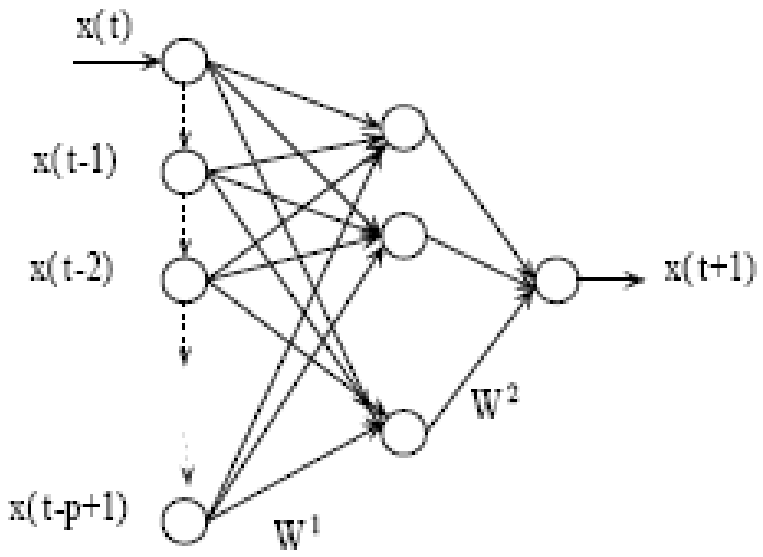
Modelare cu rețele neuronale

- Ordinul modelului este cunoscut
  - Rețea feedforward cu ferestre temporale (p unitati de intrare)

- Ordinul modelului este necunoscut
  - Retea cu unități contextuale (retea Elman)

Rețele cu ferestre temporale

Arhitectura:



Functionare:

$$y = \sum_{k=1}^{K} w_k^2 f\left(\sum_{j=0}^{p-1} w_{kj}^1 x(t-j)\right)$$

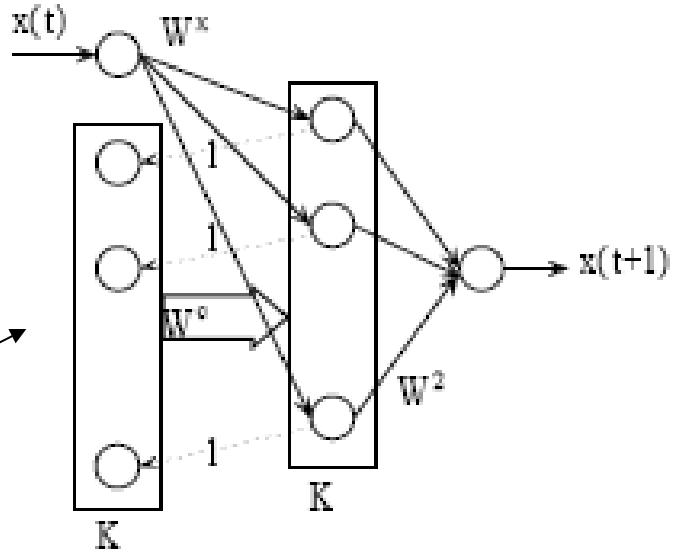
Rețele cu ferestre temporale

Antrenare:

- Set antrenare: $\{((x_l, x_{l-1}, \ldots, x_{l-p+1}), x_{l+1})\}_{l=1..L}$
- Algoritm de antrenare: BackPropagation
- Dezavantaj: presupune cunoașterea lui p

Rețele cu unități contextuale

Arhitectura (retea Elman):



Unități contextuale

Funcționare:

$$y = \sum_{k=1}^{K} w_k^2 h_k(t)$$

$$h_k(t) = f\left(w_k^x x(t) + \sum_{j=1}^{K} w_{kj}^c h_j(t-1)\right) \qquad h_j(0) = 0.$$

Obs: unitățile contextuale conțin copii ale stărilor unităților ascunse

Rețele cu unități contextuale

Antrenare

Set antrenare: {(x(1),x(2)),(x(2),x(3)),…(x(t-1),x(t))}

Ponderi:

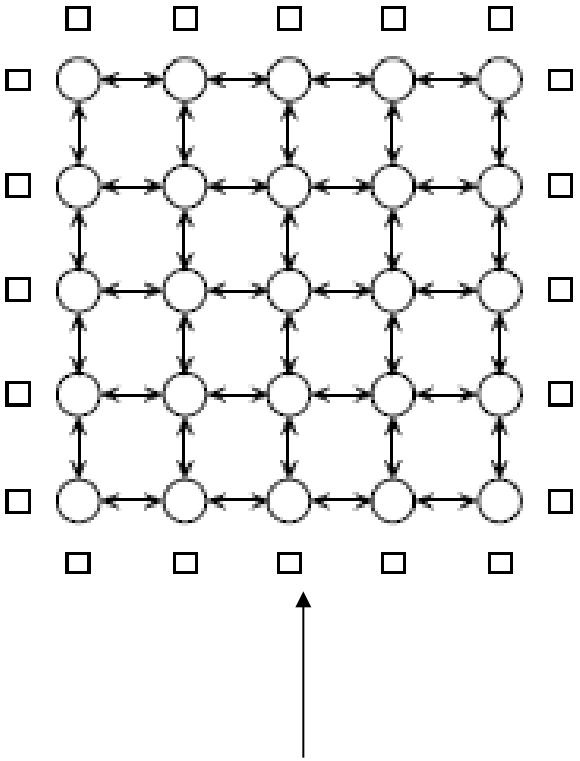
- Ajustabile: W^x, W^c si W^2
- Neajustabile: ponderile conexiunilor dintre nivelul ascuns si cel contextual

Algoritm antrenare: BackPropagation

Rețele celulare

Arhitectura:

- Toate unitățile au dublu rol: unități de intrare și unități de ieșire
- Unitățile sunt plasate în nodurile unei grile bidimensionale (notata cu L)
- Fiecare unitate este identificată prin poziția ei p=(i,j) în cadrul grilei
- Fiecare unitate este conectată doar cu unitățile aflate în vecinătatea sa (vecinătățile se definesc pe baza unei distanțe; cel mai frecvent se folosește d((i,j),(k.l))=max{|i-k|,|j-l|}

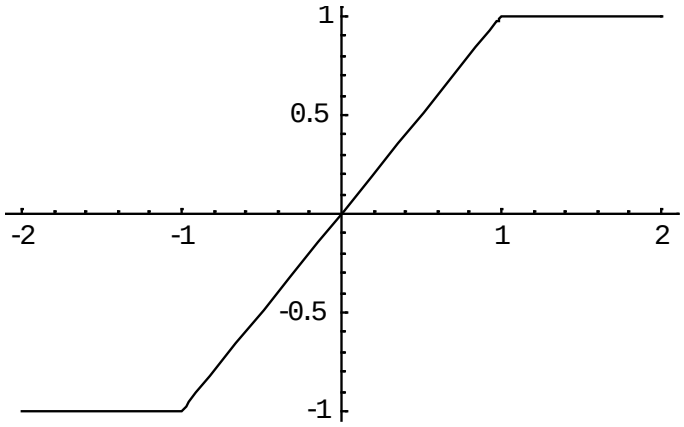


Unități virtuale

Rețele celulare

Funcție de activare: rampă

$$f(u) = (|u+1| - |u-1|)/2$$



Notatii

- $X(t) = \{x_p(t) | p \in \mathcal{L}\}$ reprezintă ansamblul semnalelor de intrare în unităţile funcţionale;
- $Y(t) = \{y_p(t) | p \in \mathcal{L}\}$ reprezintă ansamblul semnalelor de ieşire, $y_p(t) = f(x_p(t))$;
- $U(t) = \{u_p(t) | p \in \mathcal{L}\}$ reprezintă ansamblul semnalelor de control transmise unităţilor;
- $I(t) = \{i_p(t) | p \in \mathcal{L}\}$ reprezintă ansamblul pragurilor corespunzătoare unităţilor;
- a_{pq} este ponderea conexiunii dintre unitatea q şi unitatea p;
- b_{pq} este ponderea conexiunii de la componenta q a semnalului de control la unitatea funcţională p;

Rețele celulare

Funcționare:

Semnal produs de alte unități

Semnal de control (sau de intrare)

$$\frac{dx_p(t)}{dt} = -x_p(t) + \sum_{q \in V(p)} a_{pq} y_q(t) + \sum_{q \in V(p)} b_{pq} u_q(t) + i_p(t), \quad p \in \mathcal{L}$$

Semnal de intrare (similar unui prag)

Obs:

- Grila asociată rețelei este bordată cu celule virtuale care produc o valoare specifică (in funcție de condițiile la frontieră)
- Caz particular: ponderile conexiunilor dintre unitățile vecine nu depind de poziția acestor unități

Exemplu: dacă p=(i,j), q=(i-1,j), p'=(i',j'), q'=(i'-1,j') atunci

$$a_{pq} = a_{p'q'} = a_{-1,0}$$

Rețele celulare

Condițiile la frontieră definesc valorile produse de către celulele virtuale

Variante de condiții la frontieră:

- Celulele virtuale produc o valoare constantă (aceeași pentru toate sau diferite în funcție de poziția lor) – condiții Dirichlet
- Celulele virtuale preiau valoarea unității funcționale vecine (de exemplu: $z_{i,0}=z_{i,1}$, $z_{i,n+1}=z_{i,n}$, $z_{0,j}=z_{1,j}$, $z_{n+1,j}=z_{n,j}$) – condiții Neumann
- Celulele virtuale preiau valoarea unității funcționale de pe frontiera opusă (de exemplu: $z_{i,0}=z_{i,n}$, $z_{i,n+1}=z_{i,1}$, $z_{0j}=z_{nj}$, $z_{n+1,j}=z_{1,j}$) – condiții periodice la frontieră

Retele celulare

Rețelele ce folosesc ponderi care depind doar de poziția relativă a unităților se numesc rețele cu șabloane independente de poziție

Exemplu:

$$V_1(i,j) = \{(i-1,j-1),(i-1,j),(i-1,j+1),(i,j-1),(i,j),(i,j+1),(i+1,j-1),(i+1,j),(i+1,j+1)\}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{-1,-1} & a_{-1,0} & a_{-1,1} \\ a_{0,-1} & a_{0,0} & a_{0,1} \\ a_{1,-1} & a_{1,0} & a_{1,1} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{-1,-1} & b_{-1,0} & b_{-1,1} \\ b_{0,-1} & b_{0,0} & b_{0,1} \\ b_{1,-1} & b_{1,0} & b_{1,1} \end{bmatrix}$$

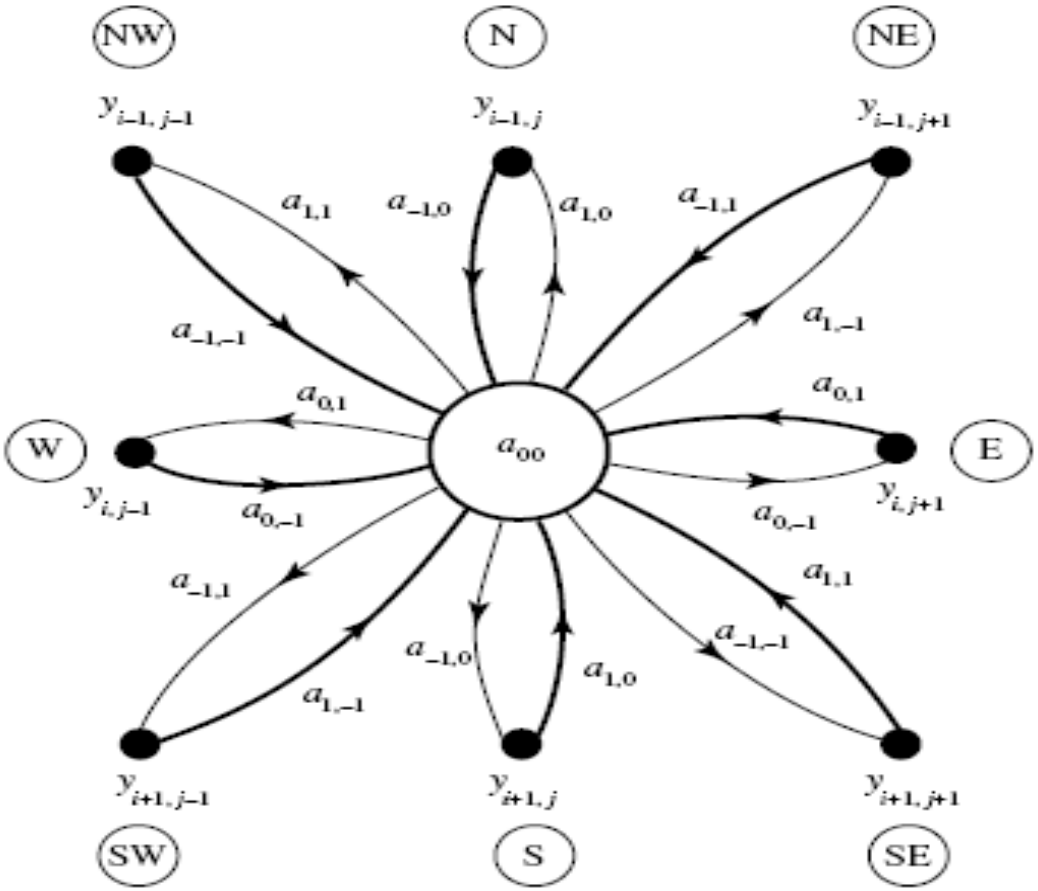
$$\frac{dx_{i,j}(t)}{dt} = -x_{i,j}(t) + \sum_{(k,l)\in V^*} a_{k,l} y_{i+k,j+l}(t) + \sum_{(k,l)\in V^*} b_{k,l} u_{i+k,j+l}(t) + I, \qquad i,j \in \{1,\ldots,n\}$$

cu

$$V^* = \{(-1,-1),(-1,0),(-1,1),(0,-1),(0,0),(0,1),(1,-1),(1,0),(1,1)\}$$

Retele celulare

Utilizarea elementelor din șabloanele independente de poziție:



Rețele celulare

Simulare software = rezolvare numerică a sistemului de ecuații diferențiale completat cu o condiție inițială

Se poate folosi metoda explicită a lui Euler

$$x_p(t+1) = (1-h)x_p(t) + h\Big(\sum_{(k,l)\in V^*} a_{k,l}y_{i+k,j+l}(t) + \sum_{(k,l)\in V^*} b_{k,l}u_{i+k,j+l}(t) + I\Big), \qquad i,j \in \{1,\ldots,n\}$$

p=(i,j)

Aplicabilitate:

- Prelucrarea imaginilor alb-negru sau pe nivele de gri
- Fiecare pixel este asociat cu o unitate a rețelei
- Nivelul de gri al unui pixel este codificat în [-1,1]

Rețele celulare

Prelucrarea imaginilor:

- In functie de alegerea matricilor șablon, a semnalului de control (u), a condiției inițiale (x(0)) și a condițiilor pe frontieră (z) se obțin diferite tipuri de prelucrări:
  - Binarizare (imagine pe nivele de gri -> imagine binară)
  - Umplerea golurilor în imagini binare
  - Eliminarea zgomotului (pixeli izolați) din imagini binare
  - Detectarea contururilor în imagini binare

Observație: imaginile alb negru sunt codificate în {-1,1}:
Alb: -1
Negru: +1

Rețele celulare

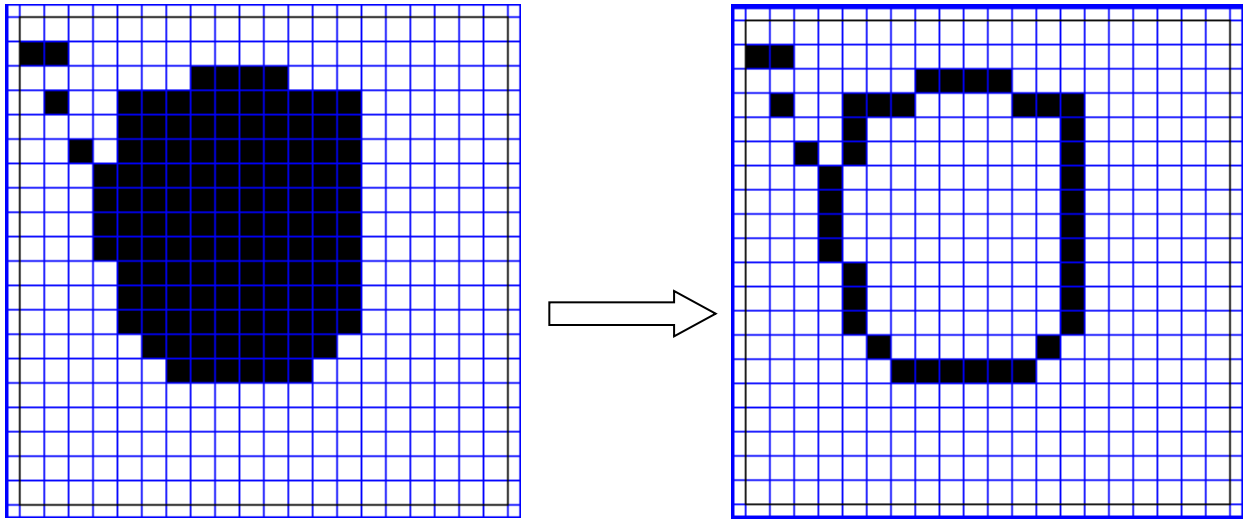
Exemplu 1: identificarea contururilor

z=-1, U=imaginea de prelucrat,

h=0.1

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

$$I=-1,\ X(0)=U$$



http://www.isiweb.ee.ethz.ch/haenggi/CNN_web/CNNsim_adv.html

Rețele celulare

Exemplu 2: umplerea golurilor

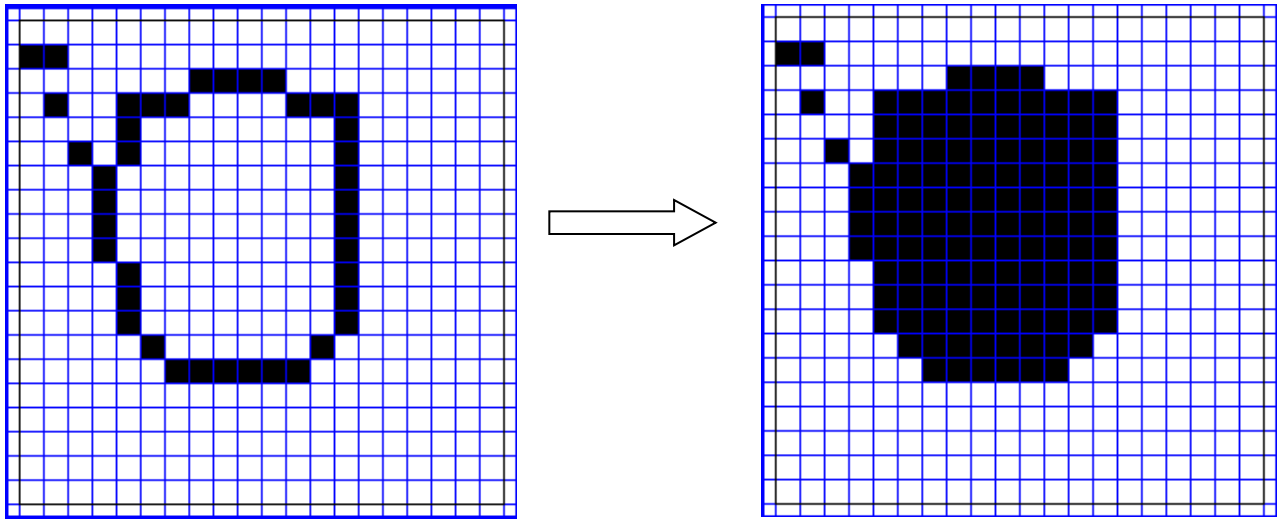
z=-1,

U=imaginea de prelucrat,

h=0.1

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 1.5 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$I=0.5,\ x_{ij}(0)=1\ (\text{toti pixelii sunt egali cu } 1)$$



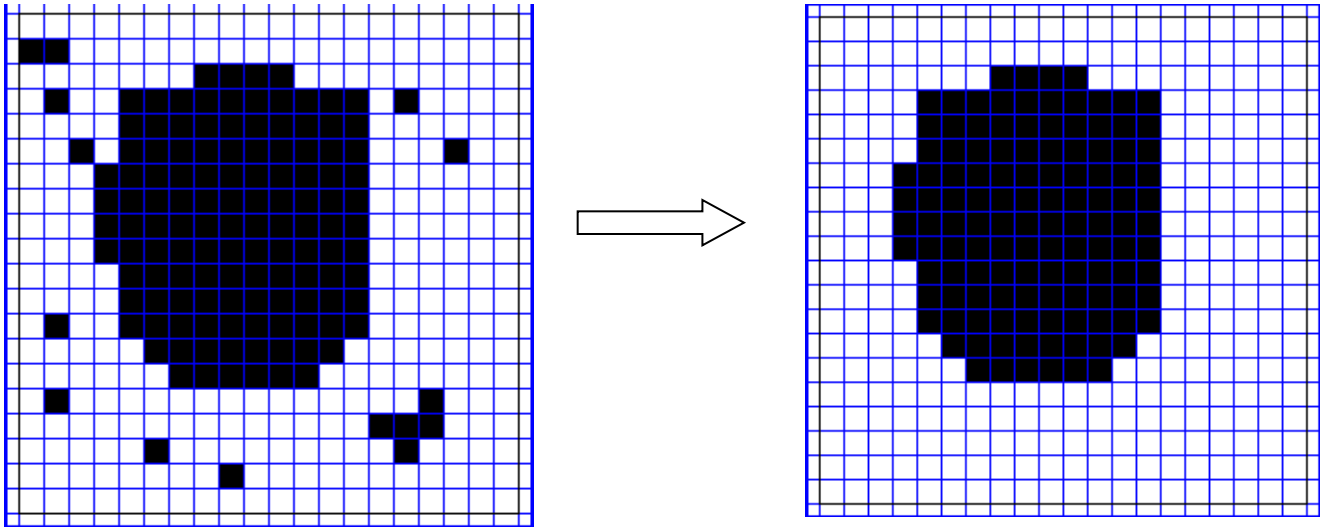
Rețele celulare

Exemplu 3: eliminarea zgomotului

z=-1, U=imaginea de prelucrat, h=0.1

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$I=0,\ X(0)=U$$



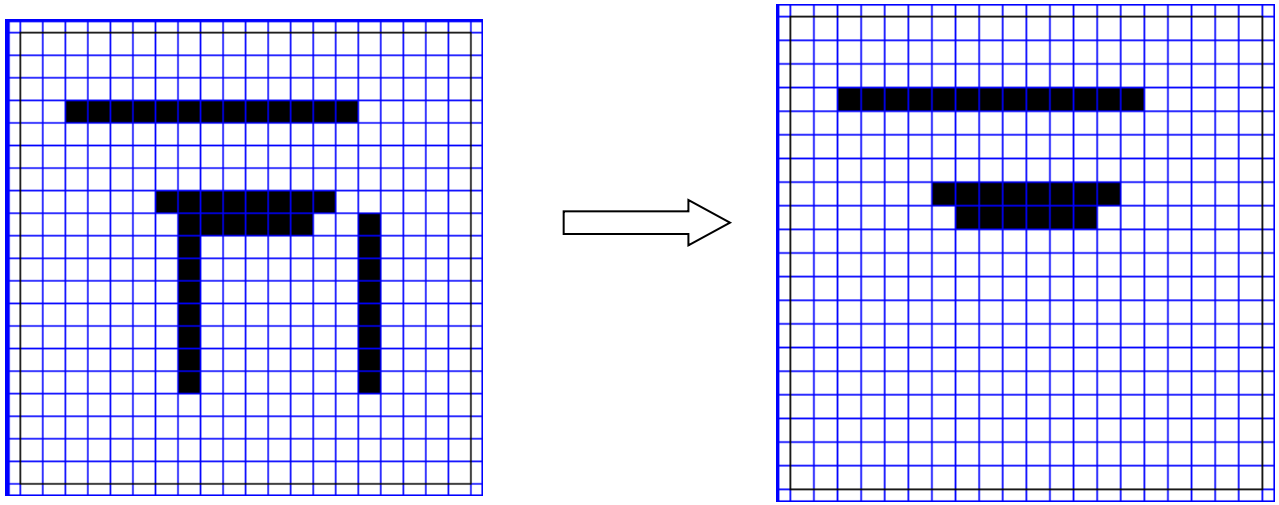
Rețele celulare

Exemplu 4: detectare linii orizontale

z=-1, U=imaginea de prelucrat, h=0.1

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I = -1, X(0) = U$$



Alte clase de rețele recurente

Reservoir computing (www.reservoir-computing.org)

Specific:

- Utilizeaza un set de unități ascunse (numit rezervor) conectate arbitrar (ponderile conexiunilor sunt stabilite aleator); fiecare dintre aceste unități realizează o transformare neliniară a semnalelor preluate de către unitățile de intrare

- Semnalele de ieșire sunt determinate prin combinarea liniară a semnalelor produse de unitățile din rezervor (și a celor de intrare)

- Doar ponderile conexiunilor către unitățile de ieșire sunt antrenate

Alte clase de rețele recurente

Reservoir computing (www.reservoir-computing.org)

Variante:

- *Temporal Recurrent Neural Network* (Dominey 1995)
- *Liquid State Machines* (Natschläger, Maass and Markram 2002)
- *Echo State Networks* (Jaeger 2001)
- *Decorrelation-Backpropagation Learning* (Steil 2004)

Alte clase de rețele recurente

Reservoir computing (www.reservoir-computing.org)

Echo State Networks:

U(t) = vector cu semnale de intrare

X(t) = vector de stare corespunzător unităților din rezervor

Z(t)=[U(t);X(t)] = vector intrare concatenat cu vector de stare

Y(t) = vector cu semnalul de ieșire

$X(t)=(1-a)x(t-1)+a\ \tanh(W^{in}\ U(t)+W\ x(t-1))$

$Y(t)=W^{out}\ Z(t)$

W^{in} ,W – stabilite aleator (W scalata a.i. raza spectrală = valoarea proprie maximă să aibă o valoare prestabilită);

W^{out} determinat prin antrenare

Alte clase de rețele recurente

Reservoir computing (www.reservoir-computing.org)

Aplicații:

- recunoașterea vorbirii
- Recunoașterea scrisului de mână
- Controlul roboților
- Predicția datelor financiare
- Predicția în timp real a atacurilor de epilepsie