Strategii evolutive

- Specific
- Structura generală
- Operatori de recombinare
- Operatori de mutație
- Variante de selecție a supraviețuitorilor
- Adaptarea și auto-adaptarea parametrilor

Specific

Strategii evolutive: metode evolutive de rezolvare a problemelor de optimizare în domenii continue

Istoric: prima strategie a fost dezvoltată în 1964 de către Bienert, Rechenberg și Schwefel (studenți la Politehnica din Berlin) cu scopul de a optimiza structura unei conducte flexibile

Codificarea datelor: reală (elementele populației sunt vectori cu elemente reale)

Operator principal: mutație

Particularitate: auto-adaptarea parametrilor de control a mutației

Structura generală

Clasa de probleme:

Se caută x^* in $D \subset R^n$ cu proprietatea că

$f(x^*)<f(x)$ pentru orice x din D

Populația constă din elemente din D (vectori cu componente reale)

Obs. O configurație este cu atât mai bună cu cât valoarea lui f este mai mică

Structura algoritmului:

Inițializarea populației

Evaluare populație inițială

REPEAT

  generare urmași prin recombinare

  modificarea urmașilor prin mutație

  evaluarea urmașilor

  selecția supraviețuitorilor

UNTIL <e satisfacută o condiție de oprire>

Criterii referitoare la resurse
(ex: număr generații)

Criterii referitoare la convergență
(ex: valoare f sau masura a diversitatii)

Operatori de recombinare

Specific: constă in generarea unui urmaș pornind de la un set de părinți

$$y = \sum_{i=1}^{\rho} c_i x^i, \quad 0 < c_i < 1, \ \sum_{i=1}^{\rho} c_i = 1$$

Recombinare intermediară (convexă): urmașul este o combinație liniară a părinților

$$y_j = \begin{cases} x_j^1 & \text{cu probabilitatea } p_1 \\ x_j^2 & \text{cu probabilitatea } p_2 \\ \vdots & \\ x_j^{\rho} & \text{cu probabilitatea } p_{\rho} \end{cases},$$

$$0 < p_i < 1, \ \sum_{i=1}^{\rho} p_i = 1$$

Recombinare discretă: urmașul este constituit din componente selectate aleator de la părinți

Operatori de recombinare

Recombinare geometrică:

$$y_j = (x_j^1)^{c_1}(x_j^2)^{c_2}\ldots(x_j^{\rho})^{c_\rho}, \quad 0 < c_i < 1, \ \sum_{i=1}^{\rho} c_i = 1$$

Observație: a fost introdusă de Michalewicz pentru probleme de optimizare cu restricții

Recombinare euristică:

$y=x^i+u(x^i-x^k)$ cu x^i element cel puțin la fel de bun ca și x^k

u – valoare aleatoare din (0,1)

Operatori de recombinare

Recombinare de tip SBX (Simulated Binary Crossover) [Deb, Agrawal, 1995]:

Idee: reproducerea proprietăților încrucișării cu un punct de tăietură

Observații:

- încrucișarea cu un punct de tăietură conservă suma valorilor elementelor: $p_1+p_2=c_1+c_2$
- Diferența dintre urmași poate fi mai mică (efect de contracție) sau mai mare (efect de extensie)
- Deb și Agrawal au studiat distribuția raportului $|c_1-c_2|/|p_1-p_2|$ și au propus o regulă de calcul specifică

Operatori de recombinare

Recombinare de tip SBX (Simulated Binary Crossover) [Deb, Agrawal, 1995]:

Mod de calcul:

$$c_1 = \overline{p} - \frac{\beta}{2}(p_2 - p_1) \qquad c_2 = \overline{p} + \frac{\beta}{2}(p_2 - p_1)$$

$$\overline{p} = \frac{p_1 + p_2}{2}$$

$$\beta = \begin{cases} (2u)^{1/(d+1)} & \text{daca } u \le 0.5 \\ \left(\frac{1}{2(1-u)}\right)^{1/(d+1)} & \text{daca } u > 0.5 \end{cases} \qquad u = rand(0,1)$$

Parametrul d: permite controlul distantei dintre părinți și urmași

- Valori mari ale lui d conduc la urmași apropiați de părinți
- Valori mici ale lui d conduc la urmași mai îndepărtați de părinți

Operatori de mutație

Principiu general: mutația constă în perturbarea a elementelor populației prin adăugarea unei variabile aleatoare

$$x' = x + z$$

$$z = (z_1, ..., z_n)$$

$$\text{vector aleator cu medie 0 si}$$

$$\text{matrice de covarianta } C = (c_{ij})_{i,j=1,n}$$

Specific: mutația prin perturbarea cu un vector aleator de medie 0 favorizează modificările mici ale configurației curente pe când mutația specifică algoritmilor genetici nu face distincție între perturbații mici și perturbații mari.

Operatori de mutație

Variante:

V1. Componentele vectorului de perturbare sunt variabile aleatoare independente ($E(z_i z_j)=E(z_i)E(z_j)=0$) cu aceeași repartiție.

Exemple:

a) fiecare componentă a vectorului perturbație are repartiția uniformă în $[-s,s]$

b) fiecare componentă a vectorului perturbație are repartiția $N(0,s)$

Obs. Matricea de covarianță va fi o matrice diagonală de forma $C=diag(s^2,s^2,\ldots,s^2)$ iar valoarea s este singurul parametru al mutației

Operatori de mutație

Variante:

V2. Componentele vectorului de perturbare sunt variabile aleatoare independente ($E(z_i z_j)= E(z_i)E(z_j)= 0$) însă cu repartiții având parametri diferiți.

Exemple:

a) componenta z_i a vectorului perturbație are repartiția uniformă in $[-s_i,s_i]$

b) fiecare componentă a vectorului perturbație are repartiția

$N(0, s_i)$

Obs. Matricea de covarianță va fi o matrice diagonală de forma

$C=diag(s^2_1,s^2_2,\ldots,s^2_n)$ iar parametrii mutației sunt $s_1,s_2,\ldots,s_n$

Operatori de mutație

Variante:

V3. Componentele vectorului de perturbare sunt variabile aleatoare corelate

Exemplu:

a) vectorul z are repartiția N(0,C)

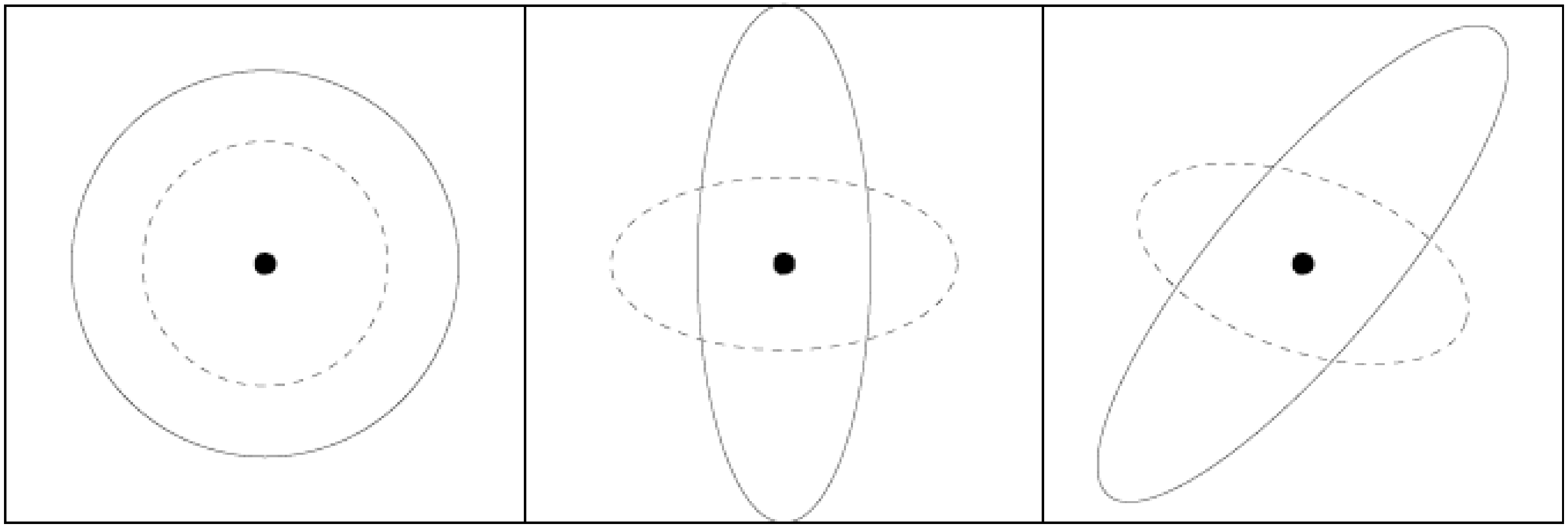
Obs. Matricea de covarianță va avea elemente nenule și în afara diagonalei principale astfel că vor fi n(n+1)/2 parametri de control ai mutației:

$s_1, s_2, \dots, s_n$ - pași de mutație

$a_1, a_2, \dots, a_k$ - unghiuri de rotație (k=n(n-1)/2)

$$c_{ij} = \frac{1}{2} \bullet (s_i^2 - s_j^2) \bullet \tan(2\, a_{ij})$$

Operatori de mutație



$$\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\mathbf{I}\right) \sim m + \sigma\mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}) \qquad \mathcal{N}\left(m, \mathbf{D}^2\right) \sim m + \mathbf{D}\,\mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}) \qquad \mathcal{N}\left(m, \mathbf{C}\right) \sim m + \mathbf{C}^{\frac{1}{2}}\mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$$

Variante de mutatie

[Hansen, PPSN 2006]

Operatori de mutație

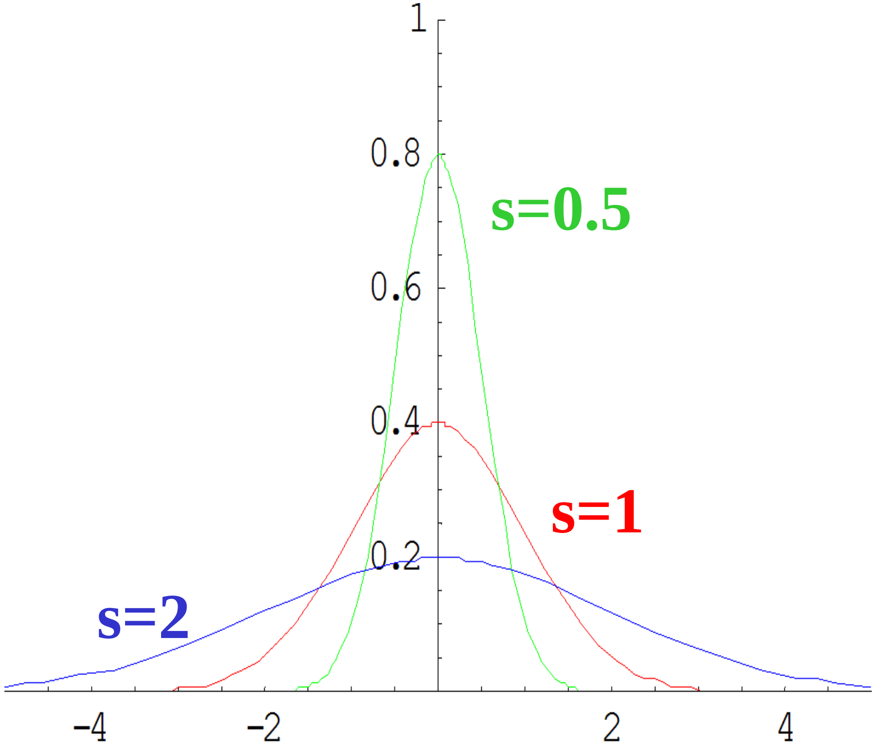
Problema: alegerea parametrilor de control ai mutației

Exemplu: perturbație de tip N(0,s)

- s mare -> perturbație mare
- s mic -> perturbație mică

Soluții:

- Metode euristice de adaptare (exemplu: regula 1/5)
- Autoadaptare (modificarea parametrilor prin încrucișare și mutație)



Operatori de mutație

Regula 1/5.

Regulă euristică dezvoltată pentru SE având perturbații independente caracterizate printr-un singur parametru s

Idee: s se ajustează în funcție de rata de succes a mutației

Rata (probabilitatea) de succes

p_s= nr. de mutații care conduc la îmbunătățiri ale configurației / nr total de mutații

Obs. 1. Rata de succes se estimează după cel puțin n mutații

2. A fost dedusă pentru cazul unui singur element în populație

Operatori de mutatie

Regula 1/5.

$$s' = \begin{cases} s/c & \text{daca } p_s > 1/5 \\ cs & \text{daca } p_s < 1/5 \\ s & \text{daca } p_s = 1/5 \end{cases}$$

Studii teoretice asupra unor cazuri particulare de funcții obiectiv (ex: funcția sferă) au condus la concluzia că valori adecvate pentru c sunt 0.8 <= c<1 (ex: c=0.817)

Operatori de mutație

Autoadaptare.

Idee:

- se extind elementele populației cu valorile parametrilor de control
- se aplică recombinare și mutație specifică și pentru parametrii de control
- vor fi favorizate valorile parametrilor de control care conduc la indivizi competitivi

Extinderea elementelor populației în funcție de tipul de perturbație

$$\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n, s)$$

$$\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n, s_1, \ldots, s_n)$$

$$\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n, s_1, \ldots, s_n, a_1, \ldots., a_{n(n-1)/2})$$

Operatori de mutație

Etape:

- se modifică componentele corespunzătoare parametrilor de control
- se modifică componentele corespunzătoare variabilelor de decizie

Exemplu: perturbare bazată pe variabile aleatoare independente

$$\bar{x} = (x_1,\ldots,x_n, s_1,\ldots,s_n)$$

$$s_i' = s_i \exp(r)\exp(r_i),$$

Variabile cu repartiție lognormală
- asigură pozitivitatea lui s
- simetrică în jurul lui 1

$$r \in N(0,1/\sqrt{2n}), r_i \in N(0,1/\sqrt{2\sqrt{n}})$$

$$x_i' = x_i + s_i' z \quad \text{cu} \quad z \in N(0,1)$$

Operatori de mutație

Obs: Există și variante de mutație care nu folosesc perturbare bazată pe distribuție normală

Varianta propusă de Michalewicz (1996):

$$x_i^{'}(t) = \begin{cases} x_i(t) + \Delta(t, b_i - x_i(t)) & \text{daca } u < 0.5 \\ x_i(t) - \Delta(t, x_i(t) - a_i) & \text{daca } u \geq 0.5 \end{cases}$$

$$\Delta(t, y) = y \cdot u \cdot (1 - t/T)^p, \ \ \mathrm{p} > 0$$

- a_i si b_i sunt limitele domeniului de valori corespunzătoare componentei x_i
- u este o valoare generată aleator in (0,1)
- t este indicatorul de iterație
- T este numărul maxim de iterații

Operatori de mutație

CMA – ES (Covariance Matrix Adaptation –ES) [Hansen, 1996]

Initialize $m \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \in \mathbb{R}_+$, $\mathbf{C} = \mathbf{I}$, and $p_c = \mathbf{0}$, $p_\sigma = \mathbf{0}$,
set $c_c \approx 4/n$, $c_\sigma \approx 4/n$, $c_{cov} \approx \mu_{eff}/n^2$, $\mu_{cov} = \mu_{eff}$, $d_\sigma \approx 1 + \sqrt{\frac{\mu_{eff}}{n}}$,
λ, and $w_i, i = 1, \ldots, \mu$ such that $\mu_{eff} \approx 0.3\,\lambda$, where $\mu_{eff} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{\mu} w_i^2}$

While not terminate

$$x_i = m + \sigma z_i, \quad z_i \sim \mathcal{N}_i(\mathbf{0}, \mathbf{C}),$$ sampling

$$m \leftarrow m + \sigma \langle z \rangle_{sel} \quad \text{where } \langle z \rangle_{sel} = \sum_{i=1}^{\mu} w_i z_{i:\lambda}$$ update mean

$$p_c \leftarrow (1 - c_c) p_c + \mathbb{1}_{\{\|p_\sigma\| < 1.5\sqrt{n}\}} \sqrt{1 - (1 - c_c)^2} \sqrt{\mu_{eff}} \langle z \rangle_{sel}$$ cumulation for $\mathbf{C}$

$$\mathbf{C} \leftarrow (1 - c_{cov}) \mathbf{C} + c_{cov} \frac{1}{\mu_{cov}} p_c p_c^{\mathrm{T}} + c_{cov} \left(1 - \frac{1}{\mu_{cov}}\right) \mathbf{Z} \quad \text{where } \mathbf{Z} = \sum_{i=1}^{\mu} w_i z_{i:\lambda} z_{i:\lambda}^{\mathrm{T}}$$ update $\mathbf{C}$

$$p_\sigma \leftarrow (1 - c_\sigma) p_\sigma + \sqrt{1 - (1 - c_\sigma)^2} \sqrt{\mu_{eff}}\, \mathbf{C}^{-\frac{1}{2}} \langle z \rangle_{sel}$$ cumulation for σ

$$\sigma \leftarrow \sigma \times \exp\left(\frac{c_\sigma}{d_\sigma}\left(\frac{\|p_\sigma\|}{\mathrm{E}\|\mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})\|} - 1\right)\right)$$ update of σ

Selecția supraviețuitorilor

Variante:

(μ, λ)

Din μ părinți se generează λ> μ urmași iar dintre aceștia se selectează μ supraviețuitori (obs: este important ca numărul urmașilor să fie mai mare decât cel al părinților)

$(\mu + \lambda)$

Din μ părinți se generează λ urmași iar din populația reunită a părinților și urmașilor se selectează μ supraviețuitori (selecție prin trunchiere). Este o selecție elitistă (cel mai bun element al populației nu se pierde)

Observație: dacă se utilizează recombinare atunci și numărul parinților (rho) se poate specifica:

$(\mu / \rho + \lambda)$ $(\mu / \rho, \lambda)$

Selecția supraviețuitorilor

Cazuri particulare:

(1+1) – dintr-un singur părinte se generează un urmaș care se acceptă doar dacă este mai bun decât părintele (similar cu algoritmii aleatori de tip Matyas sau Solis-Wets)

(1,/+λ) – dintr-un singur părinte se generează mai mulți urmași prin mutație; cel mai bun dintre urmași este selectat (părintele poate participa sau nu la selecție)

(μ+1) – dintr-o populație de μ părinți se generează un fiu iar dacă acesta este mai bun decât cel mai slab element al populației atunci este selectat

Obs: varianta $(\mu+\lambda)$ este mai orientată înspre exploatare decât (μ,λ)

Selecția supraviețuitorilor

Varianta (μ+1) corespunde strategiei de tip “steady state” (sau asincronă)

Strategie generațională:

- La fiecare iterație se construiește o nouă populație de urmași
- Procesul de selecție este aplicat asupra populației de urmași sau asupra populațiilor reunite
- Prelucrare sincronă

Strategie steady state:

- La fiecare iterație se construiește un singur element care este asimilat in populația curentă dacă este suficient de bun
- Prelucrare asincronă

Variante ale SE

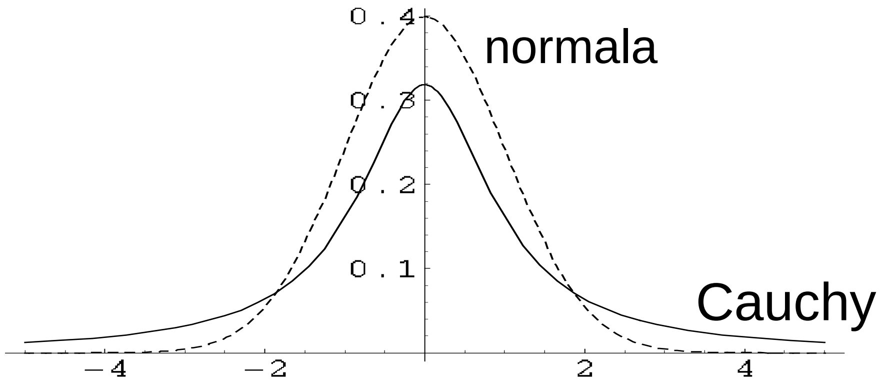
Strategii de tipul (μ, k, λ, ρ)

Durata de viață a elementelor este limitată la k generații (elementele care au supraviețuit de-a lungul a k generații sunt eliminate – cu excepția celui mai bun element al populației)

Folosește recombinare cu ρ părinți

Strategii evolutive rapide:

Perturbarea este bazată pe repartiția Cauchy $$\varphi(x) = \frac{s}{\pi(x^2 + s^2)}$$



Analiza comportării strategiilor evolutive

Criterii de evaluare:

Eficacitate:

- Valoarea funcției obiectiv după un anumit număr prestabilit de evaluări (nfe = number of function evaluation)

Rata de succes

- Raportul dintre numărul de rulări în care algoritmul atinge valoarea dorită și numărul total de evaluari

Eficiența:

- Numărul de evaluări de funcții necesare pentru ca funcția obiectiv să atingă o anumită valoare (aproximare cu o anumită acuratețe)

Sumar SE

Reprezentare	Vectori cu componente reale
Recombinare	Discretă sau intermediară
Mutație	Perturbare aleatoare (uniformă, normală Cauchy)
Selecție părinți	Uniform aleatoare sau sistematică
Selecție supraviețuitori	(μ,λ) sau (μ+λ)
Particularitate	Auto-adaptare a parametrilor de control a mutației