

CURS 3:

Verificarea corectitudinii algoritmilor

Structura

- Analiza algoritmilor
- Noțiuni de bază
- Etapele verificării corectitudinii
- Reguli pentru verificarea corectitudinii
- Exemple

Analiza algoritmilor

Analiza algoritmilor se referă la două aspecte principale:

- **Corectitudine:**
 - Se analizează dacă algoritmul produce rezultatul dorit după efectuarea unui număr finit de operații
- **Eficiența:**
 - Se estimează volumul de resurse (volum memorie și timp de execuție) necesare pentru execuția algoritmului

Verificarea corectitudinii

Există două modalități principale de a verifica corectitudinea unui algoritm:

- **Experimentală (prin testare):** algoritmul este executat pentru un set de instanțe ale datelor de intrare
 - De cele mai multe ori este imposibil să se analizeze toate cazurile posibile
- **Formală (prin demonstrare):** se demonstrează că algoritmul produce rezultatul corect pentru orice instanță a datelor de intrare care satisface cerințele problemei

Avantaje și dezavantaje

	Experimentală	Formală
Avantaje	<ul style="list-style-type: none">• simplă• relativ ușor de aplicat	<ul style="list-style-type: none">• garantează corectitudinea
Dezavantaje	<ul style="list-style-type: none">• nu garantează corectitudinea	<ul style="list-style-type: none">• destul de dificilă• nu poate fi aplicată algoritmilor complecși

Observație: În practică se folosește o variantă hibridă în care verificarea prin testare poate fi ghidată de rezultate parțiale obținute prin analiza formală a unor module de dimensiuni mici

Noțiuni de bază

- Precondiții și postcondiții
- Starea unui algoritm
- Aserțiuni
- Adnotare

Precondiții și postcondiții

- **Precondiții** = proprietăți satisfăcute de către datele de intrare
- **Postcondiții** = proprietăți satisfăcute de către datele de ieșire (rezultate)

Exemplu: *Să se determine valoarea minimă, m , dintr-o secvență (tablou) nevidă, $x[1..n]$*

Precondiții: $n \geq 1$ (secvența este nevidă)

Postcondiții: $m = \min\{x[i]; 1 \leq i \leq n\}$ (sau $m \leq x[i]$ pentru orice i)
(variabila m conține cea mai mică valoare din $x[1..n]$)

Precondiții și postcondiții

Verificarea corectitudinii parțiale = se demonstrează că **dacă** algoritmul se termină după un număr finit de prelucrări atunci conduce de la precondiții la postcondiții

Corectitudine totală = corectitudine parțială + finitudine

Etape intermediare în verificarea corectitudinii:

- analiza **stării algoritmului**
- și a efectului pe care îl are fiecare pas de prelucrare asupra stării algoritmului

Starea unui algoritm

- **Stare algoritm**= set de valori corespunzătoare variabilelor utilizate în cadrul algoritmului
- De-a lungul execuției algoritmului starea acestuia se modifică întrucât variabilele își schimbă valorile
- Algoritmul poate fi considerat corect dacă la sfârșitul execuției prelucrărilor starea lui implică postcondițiile (adică variabilele corespunzătoare datelor de ieșire conțin valorile corecte)

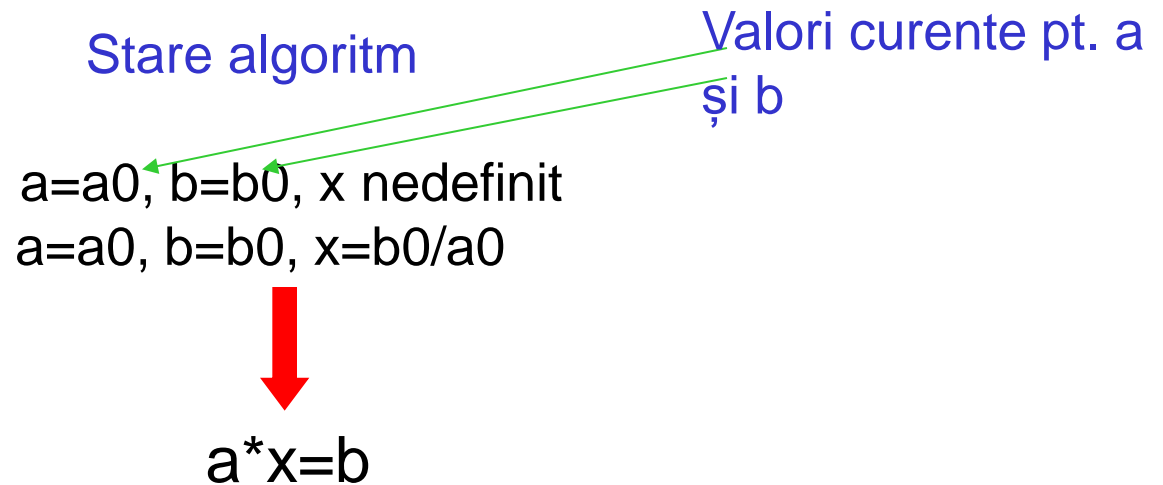
Starea unui algoritm

Exemplu: Rezolvarea ecuației $a \cdot x = b$, $a \neq 0$

Date de intrare: a
Precondiții: $a \neq 0$

Date de ieșire: x
Postcondiții: x satisface $a \cdot x = b$

Algoritm:
Solve (real a, b)
 real x
 $x \leftarrow b/a$
 return x



Aserțiuni

- **Aserțiune** = afirmație (adevărată) privind starea algoritmului
- Aserțiunile sunt utilizate pentru a **adnota algoritmi**
- Adnotarea este utilă atât în
 - **Verificarea corectitudinii algoritmilor**cât și ca
 - **Instrument de documentare și depanare a programelor**
- **Obs:** limbajele de programare permit specificarea unor aserțiuni și generarea unor excepții dacă aserțiunea nu este satisfăcută. În Python aserțiunile se specifică prin **assert**

Adnotare

Precondiții: a, b, c sunt numere reale distincte

Postcondiții: $m = \min(a, b, c)$

```
min (real a,b,c)           //{a<>b, b<>c, c<>a}

IF a<b THEN                //{a<b}
  IF a<c THEN m ← a        //{a<b, a<c, m=a} → m=min(a,b,c)
  ELSE m ← c               //{a<b, c<a, m=c} → m=min(a,b,c)
ENDIF
ELSE                         //{b<a}
  IF b<c THEN m ← b        //{b<a, b<c, m=b} → m=min(a,b,c)
  ELSE m ← c               //{b<a, c<b, m=c} → m=min(a,b,c)
ENDIF
ENDIF
RETURN m
```

Adnotare

Precondiții: a, b, c sunt numere reale distincte

Postcondiții: $m = \min(a, b, c)$

Altă variantă de determinare a minimumului a trei valori

```
min (real a,b,c)           //{a<>b, b<>c, c<>a}  
  m ← a                   // m=a  
  IF m>b THEN m ← b ENDIF // m<=a, m<=b  
  IF m>c THEN m ← c ENDIF // m<=a, m<=b, m<=c  
RETURN m
```



$m = \min(a, b, c)$

Structura

- Analiza algoritmilor
- Noțiuni de baza
- Etapele verificării corectitudinii
- Reguli pentru verificarea corectitudinii

Etapele verificării corectitudinii

- Identificarea **precondițiilor** și a **postcondițiilor**
- **Adnotarea** algoritmului cu aserțiuni astfel încât
 - Precondițiile să fie satisfacute
 - Aserțiunea finală să implice postcondițiile
- **Se demonstrează** că fiecare pas de prelucrare asigură modificarea stării algoritmului astfel încât aserțiunea următoare să fie adevărată

Câteva notații

Considerăm următoarele notații

P - precondiții

Q - postcondiții

A - algoritm

Tripletul **(P,A,Q)** reprezintă un **algoritm corect** dacă pentru datele de intrare ce satisfac precondițiile P, algoritmul:

- Conduce la postcondițiile Q
- Se oprește după un număr finit de prelucrări

Notăție:



Reguli pentru verificarea corectitudinii

Pentru a demonstra că un algoritm este corect pot fi utile câteva reguli specifice principalelor tipuri de prelucrări:

- Prelucrări secvențiale
- Prelucrări condiționale (de decizie sau de ramificare)
- Prelucrări repetitive

Regula prelucrării secvențiale

Structura

A:

$\{P_0\}$

A_1

$\{P_1\}$

...

$\{P_{i-1}\}$

A_i

$\{P_i\}$

...

$\{P_{n-1}\}$

A_n

$\{P_n\}$

Regula:

Dacă

$P \sqsupseteq P_0$

$P_{i-1} \xrightarrow{A_i} P_i, i=1..n$

$P_n \sqsupseteq Q$

atunci

$P \xrightarrow{A} Q$

Cum interpretăm ?

Dacă

- Precondițiile implică aserțiunea inițială P_0
- Fiecare acțiune (A_i) implică aserțiunea următoare (P_i)
- Aserțiunea finală implică postcondițiile

atunci secvența de prelucrări este corectă

Regula prelucrării secvențiale

Problema: Fie x și y două variabile având valorile a și b . Să se interschimbe valorile celor două variabile.

P: $\{x=a, y=b\}$

Q: $\{x=b, y=a\}$

Varianta 1:

$\{x=a, y=b, \text{aux nedefinit}\}$

$\text{aux} \leftarrow x$

$\{x=a, y=b, \text{aux}=a\}$

$x \leftarrow y$

$\{x=b, y=b, \text{aux}=a\}$

$y \leftarrow \text{aux}$

$\{x=b, y=a, \text{aux}=a\} \sqcap Q$

Varianta 2 (a și b sunt numere):

$\{x=a, y=b\}$

$x \leftarrow x+y$

$\{x=a+b, y=b\}$

$y \leftarrow x-y$

$\{x=a+b, y=a\}$

$x \leftarrow x-y$

$\{x=b, y=a\} \sqcap Q$

Regula prelucrării secventiale

Ce se poate spune despre următoarea variantă ?

$\{x=a, y=b\}$
 $x \leftarrow y$
 $\{x=b, y=b\}$
 $y \leftarrow x$
 $\{x=b, y=b\} \quad \square / \quad Q$

Aceasta variantă nu satisface
specificațiile problemei !

Regula prelucrării condiționale

Structura

A:

{P₀}

IF c

THEN

{c, P₀}

A₁

{P₁}

ELSE

{NOT c, P₀}

A₂

{P₂}

Regula:

Dacă

- c este bine definită
- $c \text{ AND } P_0 \xrightarrow{A_1} P_1$
- $P_1 \sqcap Q$

și

- $\text{NOT } c \text{ AND } P_0 \xrightarrow{A_2} P_2$
- $P_2 \sqcap Q$

atunci

$P \xrightarrow{A} Q$

Cum interpretăm?

Condiția c (expresie logică) este bine definită dacă poate fi evaluată

Ambele ramuri ale structurii conduc la postcondiții

Regula prelucrării conditionale

Problema: calculează minimul a două valori

Precondiții: $a \neq b$

Postcondiții: $m = \min\{a, b\}$
 $\{a \neq b\}$

IF $a < b$

THEN

$\{a < b, m \text{ nedefinită}\}$

$m \leftarrow a$

$\{a < b, m = a\}$

ELSE

$\{b < a, m \text{ nedefinită}\}$

$m \leftarrow b$

$\{b < a, m = b\}$

Dacă

$\{a < b, m = a\}$ implică $m = \min\{a, b\}$

și

$\{b < a, m = b\}$ implică $m = \min\{a, b\}$

Atunci algoritmul satisface specificațiile

Regula prelucrării repetitive

Verificarea corectitudinii structurii secvențiale și a celei condiționale este simplă ...

verificarea corectitudinii prelucrărilor repetitive nu este la fel de simplă ...

La nivel informal un ciclu este corect dacă are proprietățile:

- Dacă se termină conduce la satisfacerea postcondițiilor
- Se termină după un număr finit de pași

Dacă este satisfăcută doar prima proprietate ciclul este considerat parțial corect

Corectitudinea parțială poate fi demonstrată folosind inducția matematică sau așa numitele proprietăți invariante

Corectitudinea totală necesită și demonstrarea finitudinii

Pauză

Vă mai amintiți întrebarea de la sfârșitul cursului anterior ?

Considerăm secvența de numere naturale:

8 5 7 2 6 3 1

Plasați operatori de adunare și scădere între valorile din șir astfel încât rezultatul obținut să fie un număr cu modulul (valoarea absolută) par

Pauză

Răspunsurile voastre:

$$8 + 5 + 7 + 2 + 6 + 3 + 1$$

$$8 + 5 + 7 + 2 + 6 + 3 - 1$$

$$8 + 5 - 7 + 2 - 6 + 3 - 1$$

$$8 - 5 + 7 - 2 + 6 - 3 - 1$$

$$8 + 5 - 7 + 2 - 6 + 3 - 1$$

$$8 - 5 + 7 - 2 - 6 + 3 - 1$$

$$8 - 5 + 7 + 2 - 6 + 3 - 1$$

$$8 + 5 + 7 + 2 - 6 - 3 + 1$$

$$-8 + 5 + 7 + 2 - 6 + 3 + 1$$

$$8 + 5 - 7 + 2 - 6 + 3 + 1$$

$$8 - 5 + 7 - 2 - 6 - 3 + 1$$

$$8 + 5 - 7 + 2 - 6 + 3 - 1$$

$$8 + 5 + 7 + 2 - 6 + 3 - 1$$

$$8 + 5 - 7 + 2 - 6 + 3 - 1$$

$$8 - 5 + 7 + 2 - 6 + 3 + 1$$

$$8 + 5 + 7 - 2 - 6 - 3 - 1$$

$$8 + 5 - 7 + 2 + 6 - 3 + 1$$

$$8 + 5 - 7 + 2 + 6 + 3 - 1$$

$$8 - 5 + 7 + 2 + 6 - 3 + 1$$

$$8 - 5 - 7 + 2 + 6 + 3 + 1$$

$$8 + 5 + 7 - 2 + 6 + 3 + 1$$

Pauză

Răspunsurile voastre:

$$8 + 5 - 7 + 2 - 6 + 3 + 1$$

$$8 - 5 + 7 + 2 + 6 + 3 + 1$$

$$8 + 5 + 7 + 2 + 6 + 3 + 1$$

$$8 + 5 + 7 + 2 + 6 + 3 - 1$$

$$8 + 5 - 7 - 2 - 6 - 3 - 1$$

$$8 - 5 + 7 - 2 - 6 + 3 - 1$$

$$8 - 5 + 7 + 2 - 6 - 3 - 1$$

$$8 + 5 + 7 + 2 + 6 - 3 + 1$$

$$8 - 5 + 7 - 2 + 6 - 3 - 1$$

$$8 + 5 + 7 + 2 - 6 + 3 + 1$$

$$8 + 5 + 7 - 2 + 6 + 3 - 1$$

$$8 + 5 - 7 + 2 + 6 + 3 + 1$$

$$8 + 5 + 7 + 2 - 6 + 3 - 1$$

$$8 + 5 - 7 + 2 - 6 + 3 - 1$$

$$8 - 5 + 7 + 2 - 6 + 3 + 1$$

$$8 + 5 + 7 - 2 - 6 - 3 - 1$$

$$8 + 5 - 7 + 2 + 6 - 3 + 1$$

$$8 + 5 - 7 + 2 + 6 + 3 - 1$$

$$8 - 5 + 7 + 2 + 6 - 3 + 1$$

$$8 - 5 - 7 + 2 + 6 + 3 + 1$$

$$8 + 5 + 7 - 2 + 6 + 3 + 1$$

+

...

Pauză

Orice variantă de plasare e operatorilor este corectă

De ce ?

Pentru că numărul de termeni impari din secvență este par iar suma (diferența) a oricăror două numere de aceeași paritate este pară pe când suma (diferența) a două numere de parități diferite este impară.

Așadar, dacă numărul de termeni impari este par atunci faptul că rezultatul este par (în valoare absolută) este o **proprietate invariantă în raport cu setul de operatori (+,-) folosit**

În cazul verificării corectitudinii prelucrărilor repetitive ne interesează să identificăm proprietăți invariante în raport cu execuția corpului ciclului

Proprietăți invariante

Considerăm următorul ciclu
WHILE :

```
P ⊃ {I}
WHILE c DO
    {c,I}
    A
    {I}
ENDWHILE
{NOT c, I} ⊃ Q
```

Definiție:

O proprietate invariantă este o afirmație privind starea algoritmului (asertiune) care satisface:

1. Este adevărată la intrarea în ciclu
2. Rămâne adevărată prin execuția corpului ciclului
3. Când c devine falsă proprietatea implică postcondițiile

Dacă poate fi identificată o proprietate invariantă pentru un ciclu atunci ciclul este parțial corect

Proprietăți invariante

Precondiții:

$x[1..n]$ tablou nevid ($n \geq 1$)

Postcondiții:

$m = \min\{x[i] \mid 1 \leq i \leq n\}$

```
m ← x[1]
FOR i ← 2, n DO
  IF x[i] < m
    THEN m ← x[i]
  ENDIF
ENDFOR
```



```
i ← 1
m ← x[i]
WHILE i < n DO
  i ← i + 1
  IF x[i] < m THEN m ← x[i]
  ENDIF
ENDWHILE
```

Proprietăți invariante

P: $n \geq 1$

Q: $m = \min\{x[i]; i=1..n\}$

```
i ← 1
m ← x[i]
    {m=min{x[j]; j=1..i}}
WHILE i < n DO
    {i < n}
    i ← i+1
    {m=min{x[j]; j=1..i-1}}
    IF x[i] < m THEN m ← x[i]
    {m=min{x[j]; j=1..i}}
    ENDIF
ENDWHILE
```

Invariant:

$m = \min\{x[j]; j=1..i\}$

De ce ? Pentru ca ...

- Atunci când $i=1$ și $m=x[1]$ proprietatea considerată invariantă este adevărată
- După execuția corpului ciclului proprietatea $m = \min\{x[j]; j=1..i\}$ rămâne adevărată
- La ieșirea din ciclu (când $i=n$) proprietatea invariantă devine $m = \min\{x[j]; j=1..n\}$ care este chiar postcondiția

Proprietăți invariante

P: $n \geq 1$

Q: $m = \min\{x[i]; i=1..n\}$

Altă variantă de determinare
a minimului

$m \leftarrow x[1]$

$i \leftarrow 2$

$\{m = \min\{x[j]; j=1..i-1\}$

WHILE $i \leq n$ DO $\{i \leq n\}$

IF $x[i] < m$ THEN $m \leftarrow x[i]$

$\{m = \min\{x[j]; j=1..i\}$

ENDIF

$i \leftarrow i+1$

$\{m = \min\{x[j]; j=1..i-1\}$

ENDWHILE

Invariant:

$m = \min\{x[j]; j=1..i-1\}$

De ce ? Pentru că ...

- dacă $i=2$ și $m=x[1]$ atunci invariantul este satisfăcut
- Cât timp $i \leq n$ execuția corpului ciclului asigură conservarea proprietății invariante
- La ieșirea din ciclu are loc $i=n+1$ ceea ce implică $m = \min\{x[j]; j=1..n\}$, adică postcondiția

Proprietăți invariante

Problema: n un număr natural nenul. Să se calculeze suma cifrelor sale

Exemplu: pentru $n=5482$ se obține $2+8+4+5=19$

P: $n \geq 1, n = c_k c_{k-1} \dots c_1 c_0$

Q: $s = c_k + c_{k-1} + \dots + c_1 + c_0$

```
s ← 0
WHILE n != 0 DO
  d ← n MOD 10 //extragerea ultimei cifre
  s ← s+d      //adăugarea cifrei extrase
  n ← n DIV 10 // eliminarea cifrei din n
ENDWHILE
```

Analiza stării algoritmului:

Înainte de intrarea în ciclu ($p=0$):

$\{d=?, s = 0, n=c_k c_{k-1} \dots c_1 c_0\}$

După prima execuție a corpului ciclului ($p=1$):

$\{d=c_0, s=c_0, n=c_k c_{k-1} \dots c_1\}$

După a doua execuție a corpului ciclului ($p=2$):

$\{d=c_1, s=c_0+c_1, n=c_k c_{k-1} \dots c_2\}$

...

Care este proprietatea invariantă?

Proprietăți invariante

Problema: n un număr natural nenul. Să se calculeze suma cifrelor sale

P: $n \geq 1, n = c_k c_{k-1} \dots c_1 c_0$

Q: $s = c_k + c_{k-1} + \dots + c_1 + c_0$

```
s ← 0
WHILE n != 0 DO
  d ← n MOD 10
  s ← s+d
  n ← n DIV 10
ENDWHILE
```

Obs: p este o variabilă (implicită) care contorizează numărul de execuții ale ciclului (contorul ciclului)

Proprietate invariantă:

$\{s = c_0 + c_1 + \dots + c_{p-1}, n = c_k c_{k-1} \dots c_p\}$

Analiza stării algoritmului:

$(p=0): \{d=?, s = 0, n = c_k c_{k-1} \dots c_1 c_0\}$

$(p=1): \{d=c_0, s=c_0, n = c_k c_{k-1} \dots c_1\}$

$(p=2): \{d=c_1, s=c_0+c_1, n = c_k c_{k-1} \dots c_2\}$

...

Proprietăți invariante

Problema: n un număr natural nenul. Să se calculeze suma cifrelor sale

P: $n \geq 1, n = c_k c_{k-1} \dots c_1 c_0$

Q: $s = c_k + c_{k-1} + \dots + c_1 + c_0$

```
s ← 0
WHILE n != 0 DO
  d ← n MOD 10
  s ← s+d
  n ← n DIV 10
ENDWHILE
```

Proprietate invariantă:

I: $\{s = c_0 + c_1 + \dots + c_{p-1}, n = c_k c_{k-1} \dots c_p\}$

Verificare:

$P \rightarrow I: p=0, s=0, n = c_k c_{k-1} \dots c_1 c_0 \rightarrow I$

I rămâne adevărat după execuția ciclului (etapa $p+1$):

I (etapa p) $\rightarrow \{s = c_0 + c_1 + \dots + c_{p-1}, n = c_k c_{k-1} \dots c_p\}$

$\rightarrow \{s = c_0 + c_1 + \dots + c_{p-1} + c_p, n = c_k c_{k-1} \dots c_{p+1}\}$

$\rightarrow I$ (etapa $p+1$)

I \rightarrow Q (la ieșirea din ciclu)

$n=0 \rightarrow p=k+1 \rightarrow s = c_0 + c_1 + \dots + c_{p-1} = s = c_0 + c_1 + \dots + c_k$

Analiza stării algoritmului:

($p=0$): $\{d=?, s = 0, n = c_k c_{k-1} \dots c_1 c_0\}$

($p=1$): $\{d=c_0, s=c_0, n = c_k c_{k-1} \dots c_1\}$

($p=2$): $\{d=c_1, s=c_0+c_1,$
 $n = c_k c_{k-1} \dots c_2\}$

...

Proprietăți invariante

Problema: Fie $x[1..n]$ un tablou care conține valoarea x_0 . Să se determine cea mai mică valoare a lui i pentru care $x[i]=x_0$

P: $n \geq 1$ și există $1 \leq k \leq n$ astfel încât $x[k]=x_0$

Q: $x[i]=x_0$ și $x[j] \neq x_0$ pentru $j=1..i-1$

```
i ← 1  
WHILE x[i] ≠ x0 DO  
  i ← i+1  
ENDWHILE
```

Proprietăți invariante

Problema: Fie $x[1..n]$ un tablou care conține valoarea x_0 . Să se determine cea mai mică valoare a lui i pentru care $x[i]=x_0$

P: $n \geq 1$ și există $1 \leq k \leq n$ astfel încât $x[k]=x_0$

Q: $x[i]=x_0$ și $x[j] \neq x_0$ pentru $j=1..i-1$ **Proprietatea invariantă:**

$x[j] \neq x_0$ for $j=1..i-1$

```
i ← 1
```

```
{x[j] ≠ x0 for j=1..0}
```

```
WHILE x[i] ≠ x0 DO
```

```
{x[i] ≠ x0, x[j] ≠ x0 for j=1..i-1}
```

```
i ← i+1
```

```
{x[j] ≠ x0 for j=1..i-1}
```

```
ENDWHILE
```

De ce ? Pentru că ...

- dacă $i=1$ atunci domeniul de valori pentru j ($j=1..0$) este vid deci orice afirmație referitoare la j din acest domeniu este adevărată
- Presupunem că $x[i] \neq x_0$ și invariantul e adevărat. Atunci $x[j] \neq x_0$ for $j=1..i$
- După $i \leftarrow i+1$ se obține că $x[j] \neq x_0$ pt $j=1..i-1$
- La final, când $x[i]=x_0$ rezultă postcondiția

Proprietăți invariante

Proprietățile invariante nu sunt utile doar pentru verificarea corectitudinii ci și pentru **proiectarea ciclurilor**

La modul ideal la proiectarea unui ciclu ar trebui:

- Prima dată se identifică proprietatea invariantă
- Dupa aceea se construiește ciclul

Exemplu: să se calculeze suma primelor n valori naturale

Precondiție: $n \geq 1$

Postcondiție: $S = 1 + 2 + \dots + n$

Ce proprietate ar trebui să satisfacă S dupa execuția pentru a i -a oara a corpului ciclului?

Invariant: $S = 1 + 2 + \dots + i$

Ideea pentru proiectarea ciclului:

- Prima dată se pregătește termenul de adăugat
- Apoi se adună termenul la sumă

Proprietăți invariante

Algoritm:

```
i ← 1
S ← 1
WHILE i < n DO
  i ← i + 1
  S ← S + 1
ENDWHILE
```

Algoritm:

```
S ← 0
i ← 1
WHILE i ≤ n DO
  S ← S + i
  i ← i + 1
ENDWHILE
```

Proprietăți invariante

Algoritm:

$i \leftarrow 1$

$S \leftarrow 1$

$\{S=1+2+\dots+i\}$

WHILE $i < n$ DO

$\{S=1+2+\dots+i\}$

$i \leftarrow i+1$

$\{S=1+2+\dots+i-1\}$

$S \leftarrow S+i$

$\{S=1+2+\dots+i\}$

ENDWHILE

$\{i=n, S=1+2+\dots+i\} \sqcap S=1+\dots+n$

Algoritm:

$S \leftarrow 0$

$i \leftarrow 1$

$\{S=1+2+\dots+i-1\}$

WHILE $i \leq n$ DO

$\{S=1+2+\dots+i-1\}$

$S \leftarrow S+i$

$\{S=1+2+\dots+i\}$

$i \leftarrow i+1$

$\{S=1+2+\dots+i-1\}$

ENDWHILE

$\{i=n+1, S=1+2+\dots+i-1\}$
 $\sqcap S=1+\dots+n$

Funcții de terminare

Pentru a demonstra finitudinea unei prelucrări repetitive de tip

```
WHILE c DO  
    prelucrare  
ENDWHILE
```

este **suficient** să se identifice o **funcție de terminare**

Definiție:

O funcție $F:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$ (care depinde de contorul ciclului) este o funcție de terminare dacă satisface următoarele proprietăți:

1. F este **strict descrescătoare**
2. Dacă condiția de continuare c este **adeverată** atunci $F(p)>0$ și dacă $F(p)=0$ atunci c este **falsă**

Funcții de terminare

Observație:

- F depinde de contorul (implicit) al ciclului (notat în continuare cu p). La prima execuție a corpului ciclului p este 1, la a doua execuție a corpului ciclului este 2 s.a.m.d ...)
- F fiind strict descrescătoare va ajunge la 0 iar atunci când devine 0 condiția de continuare (condiția c) devine falsă, astfel că ciclul se termină.

Funcții de terminare

Exemplu: $S=1+\dots+n$

Prima variantă:

```
i ← 1
S ← 1
WHILE i < n DO
  i := i + 1
  {ip = ip-1 + 1}
  S ← S + i
ENDWHILE
```

$$F(p) = n - i_p$$

$$F(p) = n - i_{p-1} - 1 = F(p-1) - 1 < F(p-1)$$

$$i < n \Rightarrow F(p) > 0$$

$$F(p) = 0 \Rightarrow i_p = n$$

A doua variantă:

```
S ← 0
i ← 1
WHILE i ≤ n DO
  S ← S + i;
  i ← i + 1
  {ip = ip-1 + 1}
ENDWHILE
```

$$F(p) = n + 1 - i_p$$

$$F(p) = n + 1 - i_{p-1} - 1 = F(p-1) - 1 < F(p-1)$$

$$i \leq n \Rightarrow F(p) > 0$$

$$F(p) = 0 \Rightarrow i_p = n + 1$$

Funcții de terminare

Exemplu: Fie $x[1..n]$ un tablou care conține valoarea x_0 pe cel puțin o poziție; să se determine cel mai mic indice k pentru care $x[k]=x_0$.

```
i ← 1
WHILE x[i] != x0 DO
    i ← i+1
    {ip=ip-1+1}
ENDWHILE
```

Fie k prima apariție a lui x_0 în $x[1..n]$

$$F(p) = k - i_p$$

$$F(p) = k - i_{p-1} - 1 = F(p-1) - 1 < F(p-1)$$

$$x[i] \neq x_0 \Rightarrow i_p < k \Rightarrow F(p) > 0$$

$$F(p) = 0 \Rightarrow i_p = k \Rightarrow x[i] = x_0$$

Exemplu

Analiza corectitudinii algoritmului lui Euclid (varianta 1)

P: $a=a_0, b=b_0, a_0, b_0$ sunt numere naturale

Q: $i=\text{cmmdc}(a_0,b_0)$

```
cmmdc(a,b)
d ← a
i ← b
r ← d MOD i
WHILE r != 0 DO
    d ← i
    i ← r
    r ← d MOD i
ENDWHILE
RETURN i
```

Invariant: $\text{cmmdc}(d,i)=\text{cmmdc}(a_0,b_0)$

1. $d=a=a_0, i=b=b_0 \Rightarrow \text{cmmdc}(d,i)=\text{cmmdc}(a_0,b_0)$
2. $\text{cmmdc}(d_p,i_p)=\text{cmmdc}(i_p,d_p \text{ MOD } i_p)=\text{cmmdc}(d_{p+1},i_{p+1})$
3. $r=0 \Rightarrow i$ divide pe $d \Rightarrow \text{cmmdc}(d,i)=i$

Funcție de terminare: $F(p)=r_p$

Exemplu

Analiza corectitudinii algoritmului lui Euclid (varianta 2)

```
cmmdc(a,b)
WHILE a != 0 AND b != 0 DO
  a ← a MOD b
  IF a != 0 THEN
    b ← b MOD a
  ENDIF
ENDWHILE
IF a != 0 THEN RETURN a
  ELSE RETURN b
ENDIF
```

Invariant: $\text{cmmdc}(a,b)=\text{cmmdc}(a_0,b_0)$

1. $p=0 \Rightarrow a=a_0, b=b_0 \Rightarrow$
 $\text{cmmdc}(a,b)=\text{cmmdc}(a_0,b_0)$
2. $\text{cmmdc}(a_0,b_0)=\text{cmmdc}(a_{p-1},b_{p-1}) \Rightarrow$
 $\text{cmmdc}(a_{p-1},b_{p-1})=$
 $\text{cmmdc}(b_{p-1},a_p)=\text{cmmdc}(a_p,b_p)$
3. $a_p=0 \Rightarrow \text{cmmdc}(a,b)=b_p$
 $b_p=0 \Rightarrow \text{cmmdc}(a,b)=a_p$

Funcție de terminare: $F(p)=\min\{a_p,b_p\}$

$(b_0 > a_1 > b_1 > a_2 > b_2 > \dots \Rightarrow F(p) \text{ descreșc.})$

Exemplu

Analiza corectitudinii algoritmului lui Euclid (varianta 3)

```
cmmdc(a,b)
WHILE a != b
  IF a>b THEN a ← a-b
    ELSE b ← b-a
  ENDIF
ENDWHILE
RETURN a
```

Invariant: $\text{cmmdc}(a,b)=\text{cmmdc}(a_0,b_0)$

1. $p=0 \Rightarrow a_p=a, b_p=b \Rightarrow$
 $\text{cmmdc}(a,b)=\text{cmmdc}(a_p,b_p)$
2. $\text{cmmdc}(a,b)=\text{cmmdc}(a_{p-1},b_{p-1}) \Rightarrow$

Dacă $a_{p-1} > b_{p-1}$

$$\begin{aligned}\text{cmmdc}(a_{p-1},b_{p-1}) &= \text{cmmdc}(a_{p-1}-b_{p-1},b_{p-1}) \\ &= \text{cmmdc}(a_p,b_p)\end{aligned}$$

altfel

$$\begin{aligned}\text{cmmdc}(a_{p-1},b_{p-1}) &= \text{cmmdc}(a_{p-1},b_{p-1}-a_{p-1}) \\ &= \text{cmmdc}(a_p,b_p)\end{aligned}$$

3. $a_p=b_p \Rightarrow$
 $\text{cmmdc}(a,b)=\text{cmmdc}(a_p,b_p)=a_p$

Problema succesoriului

Reminder Curs 2: determinarea succesoriului unui număr constituit din 10 cifre distincte

```
Succesor(int x[1..n])
int i, k
i ← Identifica(x[1..n])
if i==1
then write "nu exista
succesor !"
else
  k ← Minim(x[i-1..n])
  x[i-1] ↔ x[k]
  x[i..n] ← Inversare(x[i..n])
  write x[1..n]
endif
```

Subalgoritmi:

Identifica (x[1..n])

P: $n > 1$, exista i a.i. $x[i-1] < x[i]$

Q: $x[i-1] < x[i]$ și $x[j-1] > x[j]$, $j = i+1..n$

Minim (x[i-1..n])

P: $x[i-1] < x[i]$ și $x[j-1] > x[j]$, $j = i+1..n$

Q: $x[k] > x[i-1]$ și $x[k] \leq x[j]$, j în $\{i, \dots, n\}$ cu $x[j] > x[i-1]$

Inversare(x[i..n])

P: $x[j] = x_0[j]$, $j = i..n$

Q: $x[j] = x_0[n+i-j]$, $j = i..n$

Problema succesoriului

Identifică cel mai din dreapta element, $x[i]$, care este mai mare decât vecinul său din stânga ($x[i-1]$)

```
Identifica(int x[1..n])
int i
i ← n
WHILE (i>1) and (x[i-1]>x[i])
DO
    i ← i-1
ENDWHILE
RETURN i
```

P: $n > 1$, există i a.i. $x[i-1] < x[i]$

Q: $x[i-1] < x[i]$ and $x[j-1] > x[j]$, $j = i+1..n$

Invariant:

$x[j-1] > x[j]$, $j = i+1..n$

Funcție de terminare:

$F(p) = (i_p - 1) H(x[i_p] - x[i_p - 1])$

$H(u) = 0$ dacă $u > 0$

1 dacă $u < 0$

Problema succesului

Determină indicele celei mai mici valori din subtabloul $x[i..n]$ care este mai mare decât $x[i-1]$

Minim(int $x[i..n]$)

int j

$k \leftarrow i$

$j \leftarrow i+1$

WHILE $j \leq n$ do

 IF $x[j] < x[k]$ and $x[j] > x[i-1]$

 THEN $k \leftarrow j$

 ENDIF

$j \leftarrow j+1$

RETURN k

P: $x[i-1] < x[i]$

Q: $x[k] \leq x[j]$, $j=i..n$, $x[j] > x[i-1]$, $x[k] > x[i-1]$

Invariant:

$x[k] \leq x[r]$, $r=i..j-1$ cu $x[r] > x[i-1]$

$x[k] > x[i-1]$

Funcție de terminare:

$F(p) = n+1-i_p$

Problema succesului

Inversează ordinea elementelor din subtabloul $x[\text{left}..\text{right}]$

inversare (int $x[\text{left}..\text{right}]$)

```
int i,j
i ← left
j ← right
WHILE i<j DO
    x[i]↔x[j]
    i ← i+1
    j ← j-1
ENDWHILE
RETURN x[left..right]
```

P: $x[k]=x_0[k]$, $k=\text{left}..\text{right}$

Q: $x[k]=x_0[\text{left}+\text{right}-k]$, $k=\text{left}..\text{right}$

Invariant:

$x[k]=x_0[\text{left}+\text{right}-k]$, $k=\text{left}..i-1$

$x[k]=x_0[k]$, $k=i..j$

$x[k]=x_0[\text{left}+\text{right}-k]$, $k=j+1..\text{right}$

Funcție de terminare:

$F(p)=H(j_p-i_p)$

$H(u)=u \quad u>0$

$0 \quad u\leq 0$

Sumar

Verificarea corectitudinii algoritmilor presupune:

- Să se demonstreze că prin execuția instrucțiunilor se ajunge de la precondiții la postcondiții (corectitudine parțială)
- Să se demonstreze că algoritmul se termină după un număr finit de pași

Invariantul unui ciclu este o proprietate (referitoare la starea algoritmului) care satisface următoarele condiții:

- Este adevărată înainte de intrarea în ciclu
- Rămâne adevărată prin execuția corpului ciclului
- La sfârșitul ciclului implică postcondițiile

Următorul curs...

- Estimarea costului unui algoritm
 - Cel mai favorabil caz
 - Cel mai defavorabil caz
 - Cazul mediu

Întrebare de final

Care dintre următoarele proprietăți poate fi folosită ca invariant pentru a demonstra că algoritmul alg returnează valoarea factorialului:

- a) $f=1*2*...*(i-1)$
- b) $i<n$
- c) $f=1*2*...*i$
- d) $f=1*2*...*n$

```
alg (int n)
  int f,i
  i ← 1
  f ← 1
  while (i<n) do
    i ← i+1
    f ← f*i
  endwhile
  return f
```